Gleichungen vom Dehn-Sommervilleschen Typ für nicht beschränkte konvexe Polytope und für Raumzerlegungen durch Hyperebenen

Naturwissenschafter und sprach vortrefflich ihre Sprache. Sehr augenfällig wurde dies auch in seinem Beratungsdienst, den er uneigennützig und stets hilfsbereit für die Kollegen aus den Naturwissenschaften unterhielt.» – Und diese intensive, freundliche Hilfsbereitschaft dürfte wohl allen jenen, die ihm je näherkommen konnten – neben seinem reichen wissenschaftlichen Lebenswerk – unvergesslich bleiben. Die Kraft zu diesem Einsatz mag er nicht zuletzt auch immer wieder in seiner verständnisvollen Familie gefunden haben. Ihr sei auch an dieser Stelle zum jähen Tode von Professor Batschelet herzliches Beileid ausgedrückt. – Kurz vor seinem plötzlichen Hinschied hat er übrigens das Manuskript seines letzten Buches «Circular Statistics with applications to biology» dem Verlag Academic Press eingereicht; ein weiteres Werk, das für den weitgespannten Kreis seiner Interessen und seine Darstellungsgabe zeugen wird! Robert Ineichen

Gleichungen vom Dehn-Sommervilleschen Typ für nicht beschränkte konvexe Polytope und für Raumzerlegungen durch Hyperebenen

1. Einleitung

In seiner 1968 erschienenen Arbeit [4] hat H. Hadwiger gezeigt, dass die Eulersche Charakteristik für Polyeder im n-dimensionalen Raum $\mathbf{R}^n$ als reellwertige Funktion χ mit den Eigenschaften

$$\chi(P \cup Q) + \chi(P \cap Q) = \chi(P) + \chi(Q) \tag{1}$$

und

$$\chi(\phi) = 0 \quad \text{und} \quad \chi(P) = 1\,, \quad \text{falls} \quad P \neq \phi, \quad \text{konvex und kompakt ist,} \tag{2}$$

definiert werden kann. Der Nachweis der Eindeutigkeit ist aufgrund dieser Postulate naheliegend. Der Existenzbeweis beruht auf der Idee der Schnittrekursion, die Hadwiger schon 1955 in [2] verwendet hatte.
In der Folge werden in [4] mehrere Anwendungen der Eulerschen Charakteristik gezeigt, unter anderem die von Hadwiger in diesem Zusammenhang unabhängig gefundenen *Dehn-Sommervilleschen Gleichungen* abgeleitet ([4], Formel (8.5)).
In [16] habe ich, ausgehend von Problemen der Computergraphik, einen allgemeineren als den üblichen Polyederbegriff eingeführt, nach dem ein Polyeder weder abgeschlossen noch beschränkt zu sein braucht (die Polyeder im üblichen Sinn sind die kompakten unter diesen allgemeineren). In [17] wurde sodann gezeigt, dass die Eulersche Charakteristik auf die Menge dieser allgemeineren Polyeder fortgesetzt werden kann. Damit stellt sich die Frage, ob frühere, sich auf kompakte Polyeder

beziehende Anwendungen auf den allgemeineren Fall übertragen werden können. Dies für die Dehn-Sommervilleschen Gleichungen zu tun, ist der erste Gegenstand des vorliegenden Beitrages, indem diese Gleichungen auf nicht notwendig beschränkte, abgeschlossene konvexe Polyeder übertragen werden. Dass es sich dabei nicht um die übliche, sich auf simpliziale Polyeder beziehende Formulierung handeln kann, liegt auf der Hand. Vielmehr stellen wir nach Hadwigers Vorbild an die betreffenden Polyeder die untenstehende Forderung (10). Auch sonst halten wir uns an Hadwigers Gedankengang, müssen aber die Bezeichnungen und gewisse Einzelheiten der allgemeineren Situation anpassen. Vgl. im übrigen die Fussnote in [4], S. 128.

Anschliessend werden wir analoge Überlegungen auf Raumzerlegungen durch endlich viele Hyperebenen («in allgemeiner Lage») anwenden und gewisse Relationen zwischen den Anzahlen p_i, c_i und b_i der Ebenen, Zellen bzw. beschränkten Zellen der verschiedenen Dimensionen $i \in \{0, \ldots, n\}$ finden.

2. Grundbegriffe

Als Polyeder im $\mathbf{R}^n$ bezeichnen wir jede Menge $P \subset \mathbf{R}^n$, die aus endlich vielen offenen (oder auch: abgeschlossenen) Halbräumen durch Bildung von Durchschnitten und Komplementärmengen, und damit auch von Vereinigungen und Differenzen, erzeugt werden kann. Endliche Durchschnitte und Vereinigungen, Komplementärmengen und Differenzen von Polyedern sind wieder Polyeder. Beispiele von Polyedern sind alle offenen und alle abgeschlossenen Halbräume, alle $\big((n-1)$-dimensionalen$\big)$ Hyperebenen, alle Ebenen (d.h. nichtleeren Durchschnitte von Hyperebenen), alle endlichen Vereinigungen von solchen, der ganze $\mathbf{R}^n$ und die leere Menge ϕ, sowie alle (kompakten) Polyeder im üblichen Sinn.

Wie in [17] gezeigt worden ist, existiert auf der Menge dieser allgemeineren Polyeder eine Eulersche Charakteristik, die durch (1) und, anstelle von (2), die Forderung

$$\begin{aligned} &\chi(\phi)=0 \quad \text{und} \\ &\chi(P)=(-1)^{\dim P}, \qquad \text{wenn} \quad P \neq \phi, \text{ relativ offen und konvex ist,} \end{aligned} \tag{3}$$

eindeutig bestimmt ist.

Sei nun $P \neq \phi$ ein abgeschlossenes konvexes Polyeder, $T(P)=\{t \in \mathbf{R}^n \colon P+t=P\}$ der Unterraum der Decktranslationen von P (vgl. [13], S. 24, Ziffer 4), M ein zu $T(P)$ komplementärer Unterraum und $Q=P \cap M$. Wir nennen P *beschränktartig,* wenn Q beschränkt, wenn also P «prismatisch» mit beschränktem «Querschnitt» ist. Nach [17], Satz 4, gilt dann

$$\chi(P)=\begin{cases} (-1)^{\dim T(P)}, & \text{wenn } P \text{ beschränktartig ist,} \\ 0, & \text{wenn } P \text{ nicht beschränktartig ist.} \end{cases} \tag{4}$$

Insbesondere ist also $\chi(P)=1$ für beschränkte, abgeschlossene und konvexe $P \neq \phi$, woraus übrigens folgt, dass χ wirklich eine Fortsetzung von Eulers Charakteristik kompakter Polyeder ist.

Jedes abgeschlossene konvexe Polyeder $P \neq \phi$ kann in der Form

$$P = M \cap \operatorname{clos} F_1^+ \cap \cdots \cap \operatorname{clos} F_s^+, \quad \text{wo} \quad P \not\subset F_p^0 \ (p \in \{1, \ldots, s\}), \tag{5}$$

dargestellt werden ([16], Satz 7;2). Hier bedeutet M eine Ebene, die F_p^+ sind offene Halbräume, F_p^0 ist die begrenzende Halbebene von F_p^+, und «clos» bezeichnet die abgeschlossene Hülle. Aus (5) folgt für die affine Hülle von P

$$\operatorname{aff} P = M \tag{6}$$

([16], Satz 7;2). Die Seiten des Polyeders (5) sind die nichtleeren unter den Durchschnitten

$$S = M \cap F_1^{\sigma_1} \cap \cdots \cap F_s^{\sigma_s}, \qquad \text{wo alle} \quad \sigma_p \in \{0, +\} \tag{7}$$

sind. Sie sind also relativ offene konvexe Polyeder ([16], Sätze 7;4 und 7;8). Aus (7) folgt

$$\operatorname{aff} S = M \cap \bigcap_{\sigma p = 0} F_p^0. \tag{8}$$

Als Dimension von S bezeichnen wir die Dimension dieser Ebene. Nach [16], Satz 6;3 (und im konvexen Fall leicht direkt einzusehen) ist P die disjunkte Vereinigung aller seiner Seiten. Bezeichnen wir mit f_k die Anzahl der k-dimensionalen Seiten, so wird also nach (1) und (3)

$$\chi(P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k. \tag{9}$$

Ist P beschränkt und $\neq \phi$, also nach (4) $\chi(P) = 1$, so ist dies der Satz von *Euler-Schläfli*.

3. Dehn-Sommervillesche Gleichungen

Das abgeschlossene konvexe Polyeder P gemäss (5) soll nun in dem Sinne nicht singulär sein, dass es die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

Zu jeder i-dimensionalen Seite S von P existieren genau $(n-i)$ Indizes p, für die $S \subset F_p^0$ gilt ($i \in \{0, \ldots, n\}$). (10)

P ist geradenfrei (d.h. es existiert keine (1-dimensionale) Gerade, die $\subset P$ wäre, vgl. [13], S. 24, Ziffer 3 ff.). (11)

Aus (11) folgt, dass auch die abgeschlossene Hülle $\operatorname{clos} S$ jeder Seite S von P

geradenfrei und damit $T(\operatorname{clos} S)=\{0\}$ ist. $\operatorname{clos} S$ ist also entweder beschränkt oder nicht beschränktartig, und nach (4) gilt

$$\chi(\operatorname{clos} S)=\begin{cases}1, & \text{wenn } S \text{ beschränkt},\\ 0, & \text{wenn } S \text{ unbeschränkt ist},\end{cases} \tag{12}$$

für jede Seite S von P.
Aus (10) folgt vorerst $M=\operatorname{aff} P=\mathbf{R}^n$, d.h. dass P ein eigentliches Polyeder in $\mathbf{R}^n$ ist. Sodann hat (10), falls $0\leqslant i\leqslant j\leqslant n$ ist, zur Folge:

Zu jeder i-dimensionalen Seite S von P existieren genau $\binom{n-i}{n-j}$ Seiten S^* der Dimension j, für die $S\subset \operatorname{clos} S^*$ ist. (13)

Dies wird im Anhang bewiesen.

Die Summe $\sum_{\dim S^*=j}\chi(\operatorname{clos} S^*)$ ist einerseits nach (12) gleich der Anzahl b_j der beschränkten unter den j-dimensionalen Seiten von P, anderseits nach Hadwiger [4], Formel (6.1)[1]) gleich $\sum_{r\geqslant 1}\chi(V_r^j)$, wo V_r^j die Vereinigung aller Durchschnitte zu je r der Mengen $\operatorname{clos} S^*$ (mit $\dim S^*=j$) ist (nur endlich viele von den V_r^j sind $\neq\phi$). Wir haben also:

$$b_j=\sum_{r\geqslant 1}\chi(V_r^j) \qquad (j\in\{0,\ldots,n\}). \tag{14}$$

Nach [16], Sätze 7;4 und 7;8, ist V_r^j die Vereinigung gewisser Seiten von P. Ist S eine Seite und $\dim S=i$, so gilt $S\subset V_r^j$ nach (13) genau dann, wenn $r\leqslant\binom{n-i}{n-j}$ ist.

Setzen wir $I(r,j)=\left\{i\colon r\leqslant\binom{n-i}{n-j}\right\}$, so folgt also aus (1), (3) und (14) (die Seiten von P sind relativ offene konvexe Polyeder, sowie paarweise disjunkt)

$$b_j=\sum_{r\geqslant 1}\ \sum_{i\in I(r,j)}(-1)^i f_i,$$

wo f_i die Anzahl der i-dimensionalen Seiten von P ist. Nach einfacher Umformung erhalten wir

$$b_j=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{n-i}{n-j}f_i, \qquad (j\in\{0,\ldots,n\}). \tag{15}$$

Dies ist die gesuchte Verallgemeinerung des Dehn-Sommervilleschen Gleichungssystems. Es gestattet, aus den Anzahlen f_i der dimensionsweise zusammengefassten Seiten von P die entsprechenden Anzahlen b_j der beschränkten Seiten zu berechnen. Dabei sei daran erinnert, dass sich die Gültigkeit von (15) auf die abgeschlossenen

1) Diese gilt auch in unserem allgemeineren Fall, was in Analogie zu [4] mit Hilfe der Schnittrekursion leicht zu beweisen ist.

konvexen Polyeder erstreckt, die (10) und (11) erfüllen (und damit insbesondere eigentlich sind).
Mit Hilfe elementarer kombinatorischer Relationen rechnet man leicht nach, dass die Matrix der Koeffizienten in (15) zu sich selber invers ist. Es gilt also auch

$$f_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-i}{n-j} b_i, \qquad (j \in \{0, \ldots, n\}). \tag{16}$$

4. Raumzerlegungen durch Hyperebenen

Seien $F_1^0, \ldots, F_m^0 \subset \mathbf{R}^n$ Hyperebenen. Das von ihnen erzeugte *Netz* $\mathfrak{N}$ ist die Menge aller Ebenen, die Durchschnitte gewisser von den F_p^0 sind, also in der Form

$$N_I = \bigcap_{p \in I} F_p^0, \qquad \text{wo } I \subset \{1, \ldots, m\}, \tag{17}$$

dargestellt werden können. Insbesondere ist (mit $I = \phi$) $\mathbf{R}^n \in \mathfrak{N}$. Wir nehmen an, dass sich die m Hyperebenen «in allgemeiner Lage» befinden, d.h. $\dim N_I = n - \operatorname{card} I$, wenn $\operatorname{card} I \leqslant n$, und $N_I = \phi$, wenn $\operatorname{card} I > n$ ist. Aus dieser Annahme folgt offensichtlich:

Sei $N \in \mathfrak{N}$, $\dim N = i$ und $i \leqslant j \leqslant n$. Dann existieren genau $\binom{n-i}{n-j}$ Netzebenen N^* der Dimension j, für die $N \subset N^*$ gilt. (18)

Mit F_p^+ und F_p^- (in beliebiger Zuordnung) bezeichnen wir die beiden durch F_p^0 bestimmten offenen Halbräume. *Elementarpolyeder* oder *Zellen* des Netzes $\mathfrak{N}$ nennen wir die nichtleeren unter den Durchschnitten

$$E = \bigcap_{p=1}^{m} F_p^{\sigma_p}, \qquad \text{wo alle} \quad \sigma_p \in \{-, 0, +\} \quad \text{sind}. \tag{19}$$

Sie sind relativ offene konvexe Polyeder, und aus (19) folgt

$$\operatorname{aff} E = \bigcap_{\sigma_p = 0} F_p^0, \qquad \text{also} \quad \operatorname{aff} E \in \mathfrak{N}, \tag{20}$$

und

$$\operatorname{clos} E = \bigcap_{p=1}^{m} \operatorname{clos} F_p^{\sigma_p} \tag{21}$$

([16], Abschnitt 2.5 und Satz 7;4).
Die Zellen, die Teilmengen einer Netzebene N sind, bilden eine Partition von N; insbesondere bilden alle Zellen eine Partition des $\mathbf{R}^n$.

Dass Gleichungen vom Dehn-Sommervilleschen Typ auch für Netze der hier betrachteten Art bestehen, ist von verschiedenen Autoren gezeigt worden; vgl. dazu [13], Abschnitt 18.1. Unseres Wissens neue Relationen dieser Art erhalten wir, indem wir die Methode von Abschnitt 3 in zwei Varianten auf ein Netz $\mathfrak{N}$ anwenden.

4.1. Sei $0 \leqslant j \leqslant n$, $\mathfrak{N}_j$ die Menge der j-dimensionalen Netzebenen und $t := \sum_{N^* \in \mathfrak{N}_j} \chi(N^*)$. Da jede Ebene ein relativ offenes konvexes Polyeder ist, wird nach (3) mit $p_j := \operatorname{card} \mathfrak{N}_j$ (insbesondere $p_n = 1$)

$$t = (-1)^j p_j. \tag{22}$$

Nach der bereits verwendeten Formel (6.1) in [4] ist anderseits

$$t = \sum_{r \geqslant 1} \chi(V_r^j), \tag{23}$$

wo V_r^j diesmal die Vereinigung aller Durchschnitte zu je r der Netzebenen aus $\mathfrak{N}_j$ bedeutet. Ist $i \leqslant j$ und $N \in \mathfrak{N}_i$, so ist nach (18) genau dann $N \subset V_r^j$, wenn $r \leqslant \binom{n-i}{n-j}$ ist. Somit ist V_r^j die (disjunkte) Vereinigung aller Zellen E, für die $\dim E \in I(r,j) := \left\{ i : r \leqslant \binom{n-i}{n-j} \right\}$ gilt. Bezeichnen wir mit c_i die Anzahl der i-dimensionalen Zellen, so wird also nach (1), (3) und (23):

$$t = \sum_{r \geqslant 1} \sum_{i \in I(r,j)} (-1)^i c_i, \qquad \text{und mit (22):}$$

$$(-1)^j p_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-i}{n-j} c_i, \tag{24}$$

oder

$$p_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{i+j} \binom{n-i}{n-j} c_i, \qquad (j \in \{0, \ldots, n\}). \tag{25}$$

Die Koeffizienten der rechten Seite von (24) sind dieselben wie in (15). Schon an jener Stelle wurde bemerkt, dass die von ihnen gebildete Matrix zu sich selber invers ist. Es gilt also auch

$$c_j = \sum_{i=0}^{j} \binom{n-i}{n-j} p_i, \qquad (j \in \{0, \ldots, n\}). \tag{26}$$

4.2. Wir setzen jetzt voraus, dass die Anzahl m der Netzhyperebenen $\geqslant n$ ist, womit wir erreichen, dass (12) (mit E anstelle von S) für alle Zellen E gilt.
Mit $\mathfrak{E}_j$ bezeichnen wir die Menge aller Zellen E^* des Netzes $\mathfrak{N}$ mit $\dim E^* = j$ und setzen $t := \sum_{E^* \in \mathfrak{E}_j} \chi(\operatorname{clos} E^*)$. Nach (12) ist einerseits

$$t = b_j := \text{Anzahl der beschränkten unter den } E^* \in \mathfrak{E}_j, \tag{27}$$

anderseits gilt wieder (23), wo aber jetzt V_r^j die Vereinigung aller Durchschnitte zu je r der Mengen $\operatorname{clos} E^*$ (mit $E^* \in \mathfrak{E}_j$) bedeutet. Aus (19), (20) und (21) folgt, dass V_r^j die Vereinigung gewisser Zellen E mit $\dim E \leqslant j$ ist. Im Anhang werden wir beweisen:

Zu jeder Zelle $E \in \mathfrak{E}_i$ existieren genau $2^{j-i}\binom{n-i}{n-j}$ Zellen $E^* \in \mathfrak{E}_j$, für die $E \subset \operatorname{clos} E^*$ gilt $(0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$. (28)

In Analogie zu (24) folgt deshalb mit (27)

$$b_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-i}{n-j} 2^{j-i} c_i, \qquad (j \in \{0, \ldots, n\}). \tag{29}$$

Auch dieses Gleichungssystem hat, wie man leicht verifiziert, die Eigenschaft, dass seine Koeffizientenmatrix zu sich selber invers ist, weshalb auch gilt

$$c_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-i}{n-j} 2^{j-i} b_i, \qquad (j \in \{0, \ldots, n\}). \tag{30}$$

Ergänzt man den $\mathbf{R}^n$ mittels einer «uneigentlichen» Hyperebene zum projektiven Raum P^n, so verschmelzen je zwei unbeschränkte Zellen des $\mathbf{R}^n$ zu einer einzigen Zelle des P^n. Die Anzahl d_i der i-dimensionalen Zellen im P^n ist deshalb $(b_i + c_i)/2$. Durch Addition von (29) und (30) erhält man somit

$$d_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-i}{n-j} 2^{j-i} d_i, \qquad (j \in \{0, \ldots, n\}), \tag{31}$$

eine Gleichung, die bei Grünbaum [13], S. 392, zu finden ist.

4.3. Aus (25), (26) und (29), (30) können direkte Beziehungen zwischen den p_i und den b_j gewonnen werden. Die einfach abzuleitenden Resultate sind

$$b_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-i}{n-j} p_i, \qquad (j \in \{0, \ldots, n\}), \tag{32}$$

$$p_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-i}{n-j} b_i, \qquad (j \in \{0, \ldots, n\}). \tag{33}$$

5. Anhang

Wir haben noch (13) und (28) zu beweisen. Da die Beweise fast wörtlich übereinstimmen, führen wir denjenigen für (28) aus, unter Hinweis auf die wesentlichen Unterschiede im Beweis von (13).

5.1. Sei $E \subset \operatorname{clos} E^*$ (also auch $\operatorname{aff} E \subset \operatorname{aff} E^*$), $\dim E = i$ und $\dim E^* = j$. Es folgt, dass die der Form (19) entsprechende Darstellung von E^* aus derjenigen von E dadurch hervorgeht, dass gewisse σ_p, die $=0$ sind, durch «+» bzw. «−» (für (13): nur «+»!) ersetzt werden. Deren Anzahl ist $(j-i)$.

5.2. Sei

$$E = F_1^0 \cap \cdots \cap F_{n-i-1}^0 \cap F_{n-i}^0 \cap F_{n-i+1}^{\sigma_{n-i+1}} \cap \cdots \cap F_m^{\sigma_m} \tag{34}$$

eine i-dimensionale Zelle. Es entstehe E^*, indem in (34) von den Vorzeichen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-i}$ (die alle $=0$ sind) deren $(j-i)$ beliebige nach Belieben in «+» oder «−» (für (13): nur «+»!) verwandelt werden. In 5.3 werden wir zeigen, dass $E^* \neq \phi$, also eine Zelle der Dimension j ist. Ferner ist (vgl. (21)) $E \subset \operatorname{clos} E^*$. Zusammen mit 5.1 folgt daraus (28) (bzw. (13)) unmittelbar.

5.3. Es genügt zu beweisen, dass

$$E^* = F_1^0 \cap \cdots \cap F_{n-i-1}^0 \cap F_{n-i}^{\sigma_{n-i}} \cap F_{n-i+1}^{\sigma_{n-i+1}} \cap \cdots \cap F_m^{\sigma_m} \neq \phi \tag{35}$$

ist für $\sigma_{n-i} =$ «+» und für $\sigma_{n-i} =$ «−» (für (13): nur «+»). Wir setzen

$$G := F_1^0 \cap \cdots \cap F_{n-i-1}^0 \cap F_{n-i+1}^{\sigma_{n-i+1}} \cap \cdots \cap F_m^{\sigma_m}. \tag{36}$$

Wegen $E \subset G$ ist $G \neq \phi$. Wir haben zu zeigen:

$$E^* = G \cap F_{n-i}^{\sigma_{n-i}} \neq \phi \quad \text{für} \quad \sigma_{n-i} = \text{«+» und} = \text{«−» (für (13): nur «+»)}. \tag{37}$$

Vorerst ist $G \not\subset F_{n-i}^0$. Andernfalls wäre nämlich $E = G$, im Widerspruch zu $\dim E = i$, $\dim G = i+1$. Da G relativ offen und $G \cap F_{n-i}^0 = E \neq \phi$ ist, folgt (37) nach [16], Satz 1.3;6.

Walter Nef, Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 J. Steiner: Einige Gesetze über die Teilung der Ebene und des Raumes. Crelles J. *1*, 349-364 (1826) (Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 79-94, Berlin 1881).
2 H. Hadwiger: Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. J. reine angew. Math. *194*, 101-110 (1955).
3 H. Hadwiger: Zur Eulerschen Charakteristik euklidischer Polyeder. Mh. Math. *64*, 349-354 (1960).
4 H. Hadwiger: Eine Schnittrekursion für die Eulersche Charakteristik euklidischer Polyeder mit Anwendungen innerhalb der kombinatorischen Geometrie. El. Math. *23*, 121-132 (1968).
5 H. Hadwiger: Notiz zur Eulerschen Charakteristik offener und abgeschlossener euklidischer Polyeder. Studia scient. Math. hung. *4*, 385-387 (1969).
6 H. Hadwiger und P. Mani: On the Euler characteristic of spherical polyhedra and the Euler relation. Mathematika *19*, 139-143 (1972).
7 H. Hadwiger: Erweiterter Polyedersatz und Euler-Shephardsche Additionstheoreme. Abh. Math. Sem. Hamburg *39*, 120-129 (1973).
8 W.B. Carver: The polygonal regions into which a plane is divided by *n* straight lines. Am. Math. Monthly *48*, 667-675 (1941).
9 G. Pólya: Mathematics and plausible reasoning. Princeton University Press, 1954 (deutsche Übersetzung: Mathematik und plausibles Schliessen. Birkhäuser Verlag, Basel 1962).
10 V. Klee: The Euler characteristic in combinatorial geometry. Am. Math. Monthly *70*, 119-127 (1963).
11 R.O. Winder: Partitions of *n*-space by hyperplanes. J. SIAM appl. Math. *14*, 811-818 (1966).
12 H. Lenz: Mengenalgebra und Eulersche Charakteristik. Abh. Math. Sem. Hamburg *34*, 135-147 (1970).
13 B. Grünbaum: Convex polytopes. John Wiley and Sons, 1967.
14 B. Grünbaum: Arrangements and spreads, CBMS Regional Conference. Series in Mathematics, Nr. 10, Am. Math. Soc. (1972)..
15 H. Bruggesser und P. Mani: Shellable decompositions of cells and spheres. Math. Scand. *29*, 197-205 (1972).
16 W. Nef: Beiträge zur Theorie der Polyeder, mit Anwendungen in der Computergraphik. Verlag Herbert Lang, Bern 1978.
17 W. Nef: Zur Eulerschen Charakteristik allgemeiner, insbesondere konvexer Polyeder. Result. Math. *3*, 64-69 (1980).
18 W. Nef: Eulers Charakteristik und die Beschränktheit konvexer Polyeder. J. reine angew. Math. *314*, 72-83 (1980).

Kleine Mitteilungen

Remarks on the differences between consecutive primes

In problem 654, Journal of Recreational Mathematics, Harry Nelson asks: "What is the most likely difference between consecutive primes?" Here a difference is 'most likely' for primes $\leq n$ if it occurs at least as often as any other difference. For a discussion see J. Rec. Math. *11*, 231.

We first show that a well-known conjecture of Hardy and Littlewood implies that the most likely difference tends to infinity with n, so that there is no most probable difference independent of n.