Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **35 (1980)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 828. Man berechne die folgenden Summen in geschlossener Form:

$$S_k := \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n} \prod_{\nu=1}^{K} \cot^2 \frac{j_\nu \pi}{2n+1}; \qquad k=1,\dots,n.$$

M. Bencze, Clui-Napoca, Rumänien

Solution: The number S_k is equal to the coefficient of x^{n-k} in a monic polynomial in x of degree n with zeros $-\cot^2(k\pi/(2n+1))$, $k=1,\dots,n$. We put

$$g(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} x^{n-k}.$$

Then $g(x)$ is a polynomial of degree n with leading coefficient $2n+1$ related to the Chebyshev polynomial of the second kind $U_{2n}(x)$; $g(x)$ has the desired zeros. In fact, $g(-\cot^2\phi) = ((i\cot\phi+1)^{2n+1} - (i\cot\phi - 1)^{2n+1})/2$ $= (-1)^n \sin((2n+1)\phi)/(\sin^{2n+1}\phi)$, which is zero for $\phi = k\pi/(2n+1)$, $k=1,\dots,n\,(0<\phi<\pi/2)$. Thus

$$g(x) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x+\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right),$$

and hence

$$S_k = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2k+1} = \frac{(2n)!}{(2k+1)!\,(2n-2k)!},$$

a Catalan number. A. A. Jagers, Enschede, NL

Bemerkung von P. Bundschuh, Köln, BRD: Ersetzt man in der Aufgabenstellung cot durch tan und bezeichnet die so entstehenden Summen mit T_k, so erhält man

$$T_k = \binom{2n+1}{2k}, \qquad k=1,\dots,n.$$

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), B. Hoffrichter (Hannover, BRD), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), L. Kuipers (Mollens VS), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 829. Unter denselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 808 [El. Math. *33*, 100 (1978)] zeige man, dass sich die drei Potenzlinien je zweier nicht benachbarter Kreise in einem Punkt P schneiden. Ferner beweise man, dass im gleichen Viereck dieser Punkt P mit dem Schnittpunkt der vier konkurrenten Geraden jener Aufgabe zusammenfällt. Hj. Stocker, Wädenswil

Lösung: Im Sehnenviereck $A_1A_2A_3A_4$ betrachten wir die beiden nicht benachbarten Kreise k_1 und k_2 über den Seiten A_1A_2 und A_3A_4. M_1 sei die Mitte der Seite A_1A_2 und M_2 die Mitte der Seite A_3A_4. Ferner sei S der Schnittpunkt der Geraden A_1A_2 und A_3A_4. Behauptung: Das Lot l_2 von M_2 auf die Seite A_1A_2 geht durch P.
Zum Beweis bezeichnen wir mit H den Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1A_3A_4$. Gemäss Lösung von Aufgabe 808 ist P der Mittelpunkt der Strecke HA_2. Bezeichnet $\bar{M}_2$ die Mitte der Strecke HA_1, so ist $M_2\bar{M}_2$ ein Durchmesser im Feuerbach-Kreis des Dreiecks $A_1A_3A_4$. $\bar{M}_2P$ steht somit senkrecht auf M_2P. Da aber $\bar{M}_2P$ parallel zur Seite A_1A_2 ist, fällt M_2P mit l_2 zusammen.
Analog zeigt man, dass das Lot l_1 von M_1 auf die Seite A_3A_4 durch P geht. P ist also der Höhenschnittpunkt im Dreieck M_1M_2S. Die Potenzlinie von k_1 und k_2 fällt aber gerade mit der dritten Höhe in diesem Dreieck zusammen und geht somit durch P. Analog zeigt man, dass auch die andern beiden Potenzlinien durch P gehen.

A. Frei, Heerbrugg

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Mollens VS) und O.P. Lossers (Eindhoven, NL).

Aufgabe 830. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 3)$ positive reelle Zahlen mit $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Dann gilt

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{x_i}{1-x_i} \frac{x_j}{1-x_j} \geqslant \frac{1}{(n-1)^2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$.
Dies ist zu beweisen.

S. Gabler, Mannheim, BRD

Solution: Consider $n-2$ nonnegative real numbers $x_1, \ldots, x_{n-2}$ such that

$$\sum_{i=1}^{n-2} x_i = 1 - s < 1 .$$

Clearly

$$a := \sum_{i=1}^{n-2} \frac{x_i}{1-x_i} \geq \sum_{i=1}^{n-2} x_i = 1 - s . \tag{1}$$

Now suppose $x_{n-1} = x$, $x_n = y$, $x + y = s$. Keeping $x_1, \ldots, x_{n-2}$ fixed we calculate the minimum of

$$\Sigma = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i}{1-x_i} \frac{x_j}{1-x_j} . \tag{2}$$

We have

$$\sum = \frac{x \cdot y}{(1-x)(1-y)} + a\left(\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y}\right) + \sum{}', \tag{3}$$

where $\sum'$ is obtained from (2) by replacing n by $n-2$.
Clearly the problem is to determine the minimal value of

$$\frac{(1-2a)xy+as}{1-s+xy} = 1-2a+\frac{a(2-s)-(1-s)}{1-s+xy}. \tag{4}$$

By (1) we have

$$a(2-s)-(1-s) \geq (1-s)^2 > 0$$

and hence (4) is minimal iff xy is maximal, i.e. iff $x=y$.
It follows that the expression $\sum$, where now all x_i can vary from 0 to 1 under the condition $\sum x_i = 1$, is minimal iff all x_i are equal.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD) (2 Lösungen), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL) (zweite Lösung), H. Wellstein (Flensburg, BRD) (2 Lösungen), M. Vowe (Therwil) (Teillösung).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1981* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 847. Die beiden Zahlenfolgen (a_n), (b_n) mit

$$a_n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{k+1}\right]} \binom{n-kj}{j} s^j$$

und

$$b_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n+kj}{j+kj}s^j$$

($n=0,1,2,\ldots$; k eine feste natürliche, s eine feste reelle Zahl) sind durch einfache Rekursionsformeln zu charakterisieren.
(Für $s=1$ sind a_n, b_n Transversalsummen, für $s=-1$ alternierende Transversalsummen im Pascal-Dreieck.)

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 848. Es seien a, b ganze, h, m, n natürliche Zahlen mit $m, n \geqslant 2$. Ferner sei

$$S=S(a,b;h;m,n):=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1}\exp\frac{2\pi ih(ra+sb)}{mn}.$$

Man zeige, dass dann und nur dann $S=0$ gilt, wenn eine der folgenden Bedingungen 1. und 2. erfüllt ist:
1. $(a,m)=1$ und $b=cm$ mit $(c,n)=1$,
2. $(b,n)=1$ und $a=dn$ mit $(d,m)=1$.

L. Kuipers, Mollens VS

Aufgabe 849. Für natürliche n beweise man

$$\exp\frac{n(n-1)}{2}\leqslant 1^1\cdot 2^2\cdots n^n\leqslant\exp\frac{n(n-1)(2n+5)}{12}.$$

M. Bencze, Brasov, Rumänien

Literaturüberschau

G. Hämmerlin: Numerische Mathematik I. Hochschultaschenbücher, Band 498, 191 Seiten, DM 12.80. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1978.
Das Büchlein führt in vier Kapiteln in die folgenden Teilgebiete der numerischen Mathematik ein: Approximation, Interpolation, numerische Quadratur und Differentiation, Gleichungssysteme. Der Autor erarbeitet die grundsätzlichen Aspekte, ohne in die Breite zu gehen. Klar tritt der Zusammenhang der einzelnen Kapitel hervor. Wo immer es angebracht scheint, wird einer funktionalanalytischen Darstellung der Vorzug gegeben. Die üblichen Kenntnisse aus den Grundvorlesungen über lineare Algebra und Analysis werden vorausgesetzt.

F. Spirig

J. Cigler und H.-C. Reichel: Topologie. Eine Grundvorlesung. Hochschultaschenbücher, Band 121, XIII und 244 Seiten, DM 16.80. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1978.
Die Autoren verfolgen ein doppeltes Ziel: einerseits die wichtigsten topologischen Begriffe und Methoden, wie sie für den modernen Ausbau der verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik (insbesondere der Analysis) erforderlich sind, in gebotener Vertiefung bereitzustellen; anderseits in die Grundprobleme und die Denkweise der Topologie als eines eigenständigen und wichtigen Teilgebiets der Mathematik einzuführen. Beides ist ihnen in ausgezeichneter und anregender Weise gelungen. Das Buch kann besonders empfohlen werden, weil die Topologie als Gebiet mit Fleisch und Blut und mit vielfältigsten Beziehungen präsentiert wird.

H. E. Debrunner