Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 35 (1980)
Heft: 6

Artikel: Eine elementar-geometrische Herleitung von [Formel]
Autor: Schönwald, Hans G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34689

Humboldt am 21. Dezember 1846 schrieb: «Er allein, nicht ich, nicht Cauchy, nicht Gauß weiß, was ein vollkommen strenger mathematischer Beweis ist, sondern wir lernen es erst von ihm. Wenn Gauß sagt, er habe etwas bewiesen, ist es mir sehr wahrscheinlich, wenn Cauchy es sagt, ist ebensoviel pro als contra zu wetten, wenn Dirichlet es sagt, ist es gewiß.»

C. Constantinescu, ETH Zürich

Eine elementar-geometrische Herleitung von $\int_0^a x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,a^{n+1}$

Diese Formel werden wir mittels vollständiger Induktion über n beweisen; die Fälle $n=0$ und $n=1$ betrachten wir nicht; der Induktionsanfang ($n=2$) wird den Weg erkennen lassen.

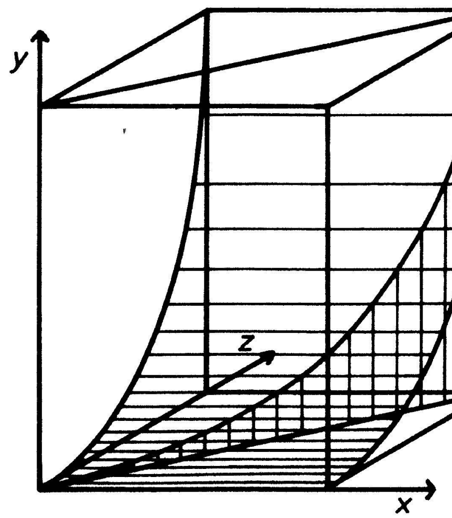

Abb. 1

Unsere Grundfigur ist ein Quader, der auf das Koordinatensystem abgestützt ist und die Dimensionen a, a^{n-1}, a aufweist (Abb. 1). Dieser Quader wird von zwei Flächen mit den Gleichungen $x-z=0$ und $y-z^{n-1}=0$ geschnitten. Durch beide Flächen zerfällt unser Quader in insgesamt vier Teile; im folgenden werden wir die beiden unteren Teile bez. ihres Rauminhalts vergleichen.

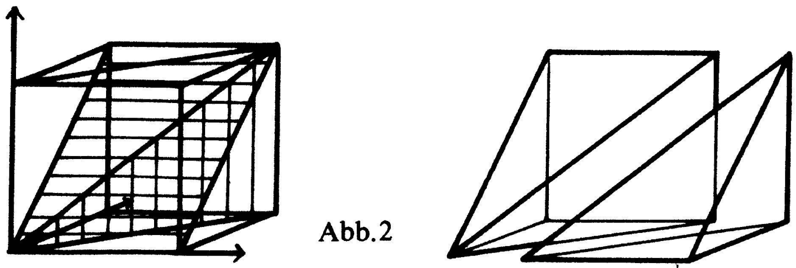

Abb. 2

Induktionsanfang ($n=2$, Abb. 2). Die beiden unteren Teile zusammen haben den Rauminhalt $a^3/2$. Der Rauminhalt des rechten unteren Teils ist halb so gross wie der des linken unteren Teils. Denn der linke untere Teil ist eine Pyramide mit der Höhe a (in z-Richtung) und der Grundfläche a^2, und der rechte untere Teil ist eine Pyramide mit der Höhe a (in x-Richtung) und der Grundfläche $a^2/2$. Beide

Pyramiden zusammen haben den Rauminhalt $a^3/2$, also hat die linke den Rauminhalt

$$\frac{1}{2}a^3 : \left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}a^3 .$$

Andererseits ist der Rauminhalt der linken Pyramide gleich $\int_0^a z^2\,dz$.

Der allgemeine Schritt. Es gelte also $\int_0^a z^{n-1}\,dz = (1/n)\,a^n$; dies ist der Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve in der zy-Ebene. Die beiden unteren Quaderteile zusammen haben somit den Rauminhalt $(1/n)\,a^{n+1}$. Der Beweis von

$$\int_0^a z^n\,dz = \frac{1}{n+1}\,a^{n+1}$$

besteht nun darin, zu zeigen, dass der Rauminhalt V_r des rechten Körpers $1/n$ des Rauminhalts V_l des linken Körpers ist. Bezeichnen wir für $0 \leq \lambda \leq a$ mit $F_r(\lambda)$ den Flächeninhalt der Schnittfläche des rechten Körpers mit der durch $x=\lambda$ beschriebenen Ebene und mit $F_l(\lambda)$ den des linken Körpers mit der durch $z=\lambda$ beschriebenen Ebene, so gilt entsprechend Abb. 3

$$V_r = \int_0^a F_r(\lambda)\,d\lambda \quad \text{und} \quad V_l = \int_0^a F_l(\lambda)\,d\lambda .$$

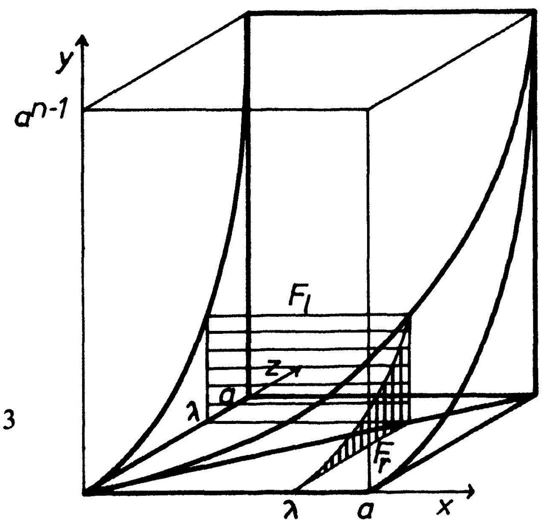

Abb. 3

Es genügt also, $F_r = (1/n)\,F_l$ nachzuweisen.

$$F_r(\lambda) = \int_0^\lambda z^{n-1}\,dz = \frac{1}{n}\lambda^n ,$$

$$F_l(\lambda) = \lambda \cdot \lambda^{n-1} = \lambda^n .$$

Die Aussage über F_r ist die Induktionsvoraussetzung, die ja für alle $a \in \mathbf{R}$ gilt.

Hans G. Schönwald, Siegen, BRD