

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 1

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aufgaben

Aufgabe 834. Zu gegebenen $m, j \in \mathbf{N}$ bezeichne $N(j, m)$ die kleinste natürliche Zahl n , für welche

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m i^{-k} \geq j$$

gilt. Man bestimme

$$g_m = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{N(j+1, m)}{N(j, m)}.$$

J. Dankert, Magdeburg, DDR
W. Moldenhauer, Rostock, DDR

Lösung: Wegen der Formel für die endliche geometrische Reihe haben wir

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m i^{-k} = m + \sum_{i=1}^{n-1} i^{-1} - \sum_{i=2}^n i^{-m} (i-1)^{-1}. \quad (1)$$

Mit der Eulerschen Konstanten γ und mit $\delta(m) := \sum_{i=2}^{\infty} i^{-m} (i-1)^{-1}$ für $m \in \mathbf{N}$ setzen wir

$$c_n := \sum_{i=1}^{n-1} i^{-1} - \log n - \gamma, \quad d_n(m) := \sum_{i>n} i^{-m} (i-1)^{-1}; \quad (2)$$

es ist $c_n = O(n^{-1})$, $d_n(m) = O(n^{-1})$ bei $n \rightarrow \infty$, letzteres sogar gleichmässig in m . Aus (1), (2) und der Definition von $N(j, m)$ erkennt man sofort bei festem m : Ist $j \rightarrow \infty$, so auch $N(j, m) \rightarrow \infty$. Nun ist mit $N := N(j, m)$

$$m + \log N + \gamma + c_N - \delta(m) + d_N(m) \geq j \quad (3)$$

und weiter: Ersetzt man hierin N durch $N-1$, so wird die entstehende linke Seite $< j$. Also ist $N/\exp(j-m-\gamma+\delta(m)) \geq \exp(-c_N-d_N(m)) \geq 1-(c/N)$ mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$, die unabhängig von m gewählt werden kann; hieraus folgt für alle grossen j

$$N(j, m) \geq \exp(j-m-\gamma+\delta(m)) - c',$$

wobei $c' > 0$ wieder unabhängig von m wählbar ist. Genauso schliesst man aus der zu (3) analogen Ungleichung mit $N-1$:

$$N(j, m) \leq \exp(j-m-\gamma+\delta(m)) + c'',$$

also

$$N(j, m) = \exp(j - m - \gamma + \delta(m)) + O(1) \quad (4)$$

bei $j \rightarrow \infty$, wobei die O -Konstante unabhängig von m genommen werden kann. Insbesondere folgt $g_m = e$ für alle $m \in \mathbb{N}$ aus (4).

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Hajnal (Szeged, Ungarn), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Mollens VS), Hj. Stocker (Wädenswil).

Aufgabe 835. Es seien $a_i (i=1, \dots, n)$ und m natürliche Zahlen. Unter $a_i^{1/m}$ werde die positive Lösung der Gleichung $x^m = a_i$ verstanden. Man beweise oder widerlege folgende Aussage: Sind die Zahlen $a_i^{1/m}$ sämtlich irrational, so ist auch $s := a_1^{1/m} + \dots + a_n^{1/m}$ irrational.

P. Mihailescu, Zürich

Lösung des Aufgabenstellers (Bearbeitung der Redaktion): Angenommen, es sei $s = q/r$ mit natürlichen teilerfremden q, r . Sei k der Grad des charakteristischen Polynoms von $a := a_n^{1/m}$, d. h. der kleinste Teiler von m derart, dass eine natürliche Zahl b existiert mit $a = b^{1/k}$. Schreiben wir

$$a = s - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{1/m}, \quad (1)$$

so sehen wir, dass – gemäss der rechten Seite von (1) – a Nullstelle des folgenden Polynoms $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ist:

$$f(x) = r^{m^{n-1}} \prod_{(v)} \left\{ (s - x) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{1/m} \omega_{v_j} \right\}, \quad (2)$$

wobei sich das Produkt über alle ganzzahligen Vektoren $(v) = (v_1, \dots, v_{n-1})$ mit $0 \leq v_j \leq n-1$ erstreckt, und $\omega_l = \exp(2\pi i l/m)$, $0 \leq l \leq m-1$ ist. (Dies folgt durch wiederholte Anwendung der Formel für ein Polynom über \mathbb{Z} , dessen eine Nullstelle die Summe zweier durch ihre charakteristischen Polynome gegebenen algebraischen Zahlen ist. Der Faktor $r^{m^{n-1}}$ sorgt dafür, dass die Koeffizienten von f ganzzahlig sind.) Andererseits ist das charakteristische Polynom von a gleich $x^k - b$, und daher ist $x^k - b$ ein Teiler von f . Es existieren also k ganzzahlige Vektoren $(v^j) = (v_1^j, \dots, v_{n-1}^j)$ derart, dass

$$x^k - b = r^k \prod_{j=1}^k \left\{ (s - x) - \sum_{t=1}^{n-1} a_t^{1/m} \omega_{v_t^j} \right\}. \quad (3)$$

a ist Nullstelle dieses Produktes, und man darf sich die Numerierung so gewählt denken, dass a gerade die erste Nullstelle ist, d. h. $(v^1) = (0, 0, \dots, 0)$. Durch Vergleich der Koeffizienten von x^{k-1} in (3) ergibt sich nun

$$ks - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^k \omega_{ij} \right) a_i^{1/m} s^k = 0. \quad (4)$$

Andererseits ist der Absolutbetrag der linken Seite von (4), wie man leicht mit Hilfe der Dreiecksungleichung verifiziert, grösser oder gleich

$$k \left(s - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{1/m} \right) = ka > 0,$$

im Widerspruch zu (4). Somit ist s irrational.

LITERATURVERZEICHNIS

A.S. Besicovitch: On the linear independence of fractional powers of integers. Proc. Lond. Math. Soc. 15 (1940).

Aufgabe 836. Gesucht ist die Konstruktion der Verbindungsgeraden zweier weit entfernter Punkte in der euklidischen Ebene mit eingeschränkten Konstruktionshilfsmitteln. Zur Verfügung stehen ein gerades Lineal mit der festen Länge L und ein Zirkel mit fest eingestelltem Radius $R < L$.

W. Gamerith und P. Schöpf, Graz, A

Lösung der Aufgabensteller:

1. Konstruktion eines Parallelogramms, so dass A, B gegenüberliegende Eckpunkte sind: Mit dem Zirkel konstruiere man, ausgehend vom Punkt A , eine Parkettierung der Ebene mit gleichseitigen Dreiecken. Auf dem Kreis mit Mittelpunkt A liegen 6 Punkte.

Betrachtet man die von A aus durch diese 6 Punkte laufenden Halbgeraden, so zerlegen diese die Ebene in 6 Sektoren. Liegt nun B auf einer dieser Halbgeraden, so ist man fertig. Andernfalls liegt B in genau einem der Sektoren, begrenzt durch die Halbgeraden h_1, h_2 .

B liegt ferner in einem abgeschlossenen Dreieck D der Parkettierung. Nun konstruiert man durch B gehende Parallelen zu h_1 bzw. h_2 ; dies geschieht wie folgt: Man wähle einen Eckpunkt von D . Durch diesen läuft vermöge der Parkettierung je eine schon konstruierte Parallele zu h_1 bzw. h_2 . Diese seien h'_1, h'_2 .

Die Parallele durch B zu h'_1 lässt sich leicht konstruieren: Man betrachte eines der beiden durch Translation parallel zu h_1 aus D hervorgehendes, D in einem Punkt berührendes Dreieck D' .

In D' konstruiert man den analog zu B liegenden Punkt B' mit den zulässigen Konstruktionsmitteln.

Die Entfernung $\overline{BB'}$ beträgt R , somit sind die beiden Punkte verbindbar, und die Strecke ist geradlinig verlängerbar, bis sie h_2 schneidet. Analog wird die Parallele zu h_2 konstruiert und damit das gesuchte Parallelogramm gezeichnet.

2. Mit dem Zirkel werden die beiden von A ausgehenden Seiten des Parallelogramms in Richtung auf ihren Schnittpunkt hin gleich oft halbiert, bis man mit den Halbierungspunkten ein dem ursprünglichen ähnliches Parallelogramm zeichnen

kann, dessen längere Diagonale kleiner als L ist. Die Verlängerung dieser Diagonale ist die gesuchte Verbindungsgerade.

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Mollens VS) (2 Lösungen), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), M. Sattler (Freiburg, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1981* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S.67), Problem 625 B (Band 25, S.68), Problem 645 A (Band 26, S.46), Problem 672 A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724 A (Band 30, S.91), Problem 764 A (Band 31, S.44).

Aufgabe 853. Gibt es zu jeder natürlichen Zahl n ein Quadrat in der kartesischen Ebene, das keine Gitterpunkte auf dem Rand und genau n Gitterpunkte im Inneren enthält?

J. Binz, Bolligen
A. Bussard, Langenthal

Aufgabe 854. Die n -fache Summe

$$\sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=2}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=2}^{\infty} \binom{k_1}{2}^{-1} \binom{k_1+k_2}{2}^{-1} \cdots \binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{2}^{-1}; \quad n \in \mathbf{N}$$

ist geschlossen auszuwerten.

I. Paasche, München, BRD

Aufgabe 855. Es sei t eine reelle Zahl mit $0 < t < 1$. Einer beliebigen (reellen oder komplexen) Nullfolge (a_n) werde die folgendermassen definierte reelle Zahl $k((a_n))$ zugeordnet: Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ bezeichne $N((a_n), \varepsilon)$ die kleinste der natürlichen Zahlen m mit der Eigenschaft

$$n \geq m \Rightarrow |a_n| < \varepsilon.$$

Dann sei

$$k((a_n)) := \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N((a_n), \varepsilon)}{N((a_n), t\varepsilon)}.$$

Man zeige: Zu jedem $\lambda \in [0, 1]$ existieren Nullfolgen (a_n) mit $k((a_n)) = \lambda$.

H. Kappus, Rodersdorf

Aufgabe 856A. Es sei $M = \{P_1, \dots, P_n\}$ eine Menge von n Punkten in einer Ebene. Bezeichnet $d(P_i, P_j)$ die euklidische Distanz von P_i, P_j , so gelte

$$d(P_i, P_j) \neq d(P_k, P_l) \Rightarrow |d(P_i, P_j) - d(P_k, P_l)| \geq \varepsilon. \quad (1)$$

Dann lässt sich für den Durchmesser $\delta(M) := \max\{d(P_i, P_j); 1 \leq i, j \leq n\}$ die Abschätzung

$$\delta(M) > C_\varepsilon n^{2/3} \quad (2)$$

gewinnen. Lässt sich (2) verschärfen?

P. Erdős

Literaturüberschau

S. Lang: Algebraische Strukturen. Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, Band 18, 194 Seiten, DM 19.80. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1979.

Unter dem Titel «Algebraic Structures» hat S. Lang eine von Studienanfängern gerne benutzte Einführung in die Algebra geschrieben, die besonders besticht durch ihre Kürze und Konzentration auf das Wesentliche. Mit dem vorliegenden Buch bringt der Verlag Vandenhoeck & Ruprecht einen Auszug in deutscher Sprache heraus. Zugleich hat der Autor noch zwei zusätzliche Kapitel für diese deutschsprachige Version beigelegt. Auf diese Weise ist nun ein idealer Begleittext für die Anfängervorlesung in Algebra entstanden, der äusserst behutsam an die abstrakten Begriffsbildungen heranhöhrt. Dies gelingt dem Autor durch bewusst gewählte Beschränkungen, die er konsequent durch das ganze Buch hindurchzieht. So wird zum Beispiel die Galoistheorie nur auf Teilkörpern von C entwickelt, und statt der sonst üblichen Ausweitungen werden zahlreiche elementare Beispiele mitgeteilt. Bemerkenswert ist auch das Kapitel über endliche Körper, in dem wesentlich mehr als nur die Existenz solcher Körper behandelt wird und das zum eigens für die deutschsprachige Ausgabe geschriebenen Teil des Buches gehört.

Aufbau und Inhalt gehen unmittelbar aus den Kapitelüberschriften hervor: 1. Die ganzen Zahlen. 2. Gruppen. 3. Ringe. 4. Polynome. 5. Körpertheorie. 6. Endliche Körper. 7. Lineare Gruppen.

Dieses Buch dürfte eine echte Lücke in der bestehenden Einführungsliteratur zur Algebra schliessen, weil es viel mehr als andere Werke auf die Bedürfnisse des Anfängers in der Algebra zugeschnitten ist. Erfreulich ist auch die Tatsache, dass der Verlag durch Verwendung des Offsetverfahrens das Buch zu einem echten Studentenpreis herausgebracht hat. Die vorzügliche Übersetzung besorgte B. Artmann.

M. Jeger

A. Schlette und I. Weidig: Grundbegriffe der Algebra. 200 Seiten, DM 19.80. Klett-Studienbuch. Klett, Stuttgart 1978.

Das vorliegende Bändchen kann als algebraischer Vorkurs bezeichnet werden. In leicht lesbarer Manier und moderner Terminologie werden Begriffe wie Verknüpfung, Gebilde, Morphismus bis hin zur Gruppe erklärt. Schliesslich werden ein paar ausgewählte Gruppenklassen erläutert. Etwa ein Viertel des Buchumfangs ist einem Exkurs in die Ring- und Körpertheorie gewidmet. Unter Ring wird dabei stets Ring mit Eins verstanden. Der Text ist überall aufgelockert mit manchmal schulbuchartig anmutenden Aufgaben und Beispielen. Die Lösungen der Aufgaben findet man im Anhang. Unangenehm und für einen gleichmässigen Lesefluss hinderlich sind die überdurchschnittlich vielen Stellen, an denen auf frühere Ergebnisse oder Beispiele verwiesen wird. Lobenswert ist die Tatsache, dass diejenigen Details, die in andern Büchern mit «wie man leicht zeigt» abgetan werden, hier ausführlich dargestellt sind.

Dem Studenten, der sich vor dem Anhören einer Algebravorlesung in die Grundbegriffe einlesen möchte, aber auch dem aktiven Lehrer, der sein Hintergrundwissen auffrischen will, kann das Buch praktische Hilfe werden.

C. Niederberger