

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$3. A = \{p_1^{a_1}; p_1^{a_2} p_2^{a_3}; p_1^{a_4} p_2^{a_5} p_3^{a_6}; p_1^{a_7} p_2^{a_8} p_3^{a_9} p_4^{a_{10}}; \dots\}, \quad \text{mit } a_j \in \mathbf{N},$$

$$4. A = \{p_1^{a_1} p_2^{a_2}; p_2^{a_3} p_3^{a_4}; p_1^{a_5} p_3^{a_6}; p_1^{a_7}; p_3^{a_8}; \dots\}, \quad \text{mit } a_j \in \mathbf{N}.$$

EZ-Menge der Form 1 sind in gewissem Sinn einzig, siehe Satz 5, doch zuerst ein Hilfssatz:

Satz 4. *Ist B eine EZ-Menge. Dann existiert zu jedem $b \in B$ mindestens eine Primzahl p , in deren Darstellung $p = b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k}$ gemäss Satz 3' b auftritt, d.h. $b = b_i$ für ein i mit $1 \leq i \leq k$ gilt.*

Beweis: Angenommen die Behauptung sei falsch, b sei die Zahl, zu der es keine Primzahl mit der behaupteten Eigenschaft gibt. Dann hat b zwei Darstellungen bezüglich B , nämlich 1. $b = b$ und 2. die durch die Primzahldarstellung von $b = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$ vermittelte, die b nicht enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass B Z-Menge ist (siehe Satz 2!).

Satz 5. Mengen der Form

$$A = \{p_1^{a_1}; p_2^{a_2}; p_3^{a_3}; \dots\} \quad (a_i \in \mathbf{N})$$

sind die einzigen EZ-Mengen, deren Elemente paarweise teilerfremd sind.

Beweis: Sei B eine EZ-Menge, deren Elemente teilerfremd sind, sei $b \in B$ und p eine der nach Satz 4 existierenden Primzahlen, in deren Darstellung $p = b_1^{r_1} \cdot \dots \cdot b_k^{r_k}$ gemäss Satz 3 b auftritt. Nach Voraussetzung gilt für $i \neq j$ $(b_i, b_j) = 1$, also folgt: $p = b^r$ mit $r \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow b = p^m$ mit $m \in \mathbf{N}$, da $b \in B$ und $B \subset \mathbf{N}$ gilt.

Thomas Jahnke, Gesamthochschule Siegen, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 P.D.T.A. Elliott: A conjecture of Kátai. Acta Arith. 26, 11–20 (1974).
- 2 K.-H. Indlekofer: On sets characterizing additive arithmetical functions. Math. Z. 146, 285–290 (1976).
- 3 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions. Acta Arith. 13, 315–320 (1968).
- 4 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions (II). Acta Arith. 16, 1–4 (1968).
- 5 D. Wolke: Bemerkungen über Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen. El. Math. 33/1 (1978).

Aufgaben

Aufgabe 837. Es seien G_1, G_2 zwei Graphen mit je n Ecken x_i bzw. y_i ($i = 1, \dots, n$) und e_n Kanten. Für die Grade (Valenzen) $\rho(x_i)$ bzw. $\rho(y_i)$ der Ecken gelte $\rho(x_i) \neq \rho(y_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$). Man bestimme $\max e_n$. P. Erdős

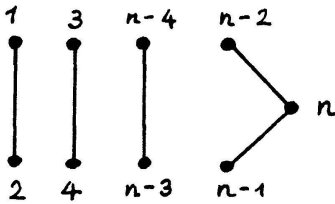
Solution: By considering the complement of the graphs $G_i, i = 1, 2$, one gets the equivalent problem of determining the minimum value of e_n .

Since valency 0 cannot occur in at least one of the graphs it follows that

$$e_n \geq \begin{cases} n/2 & n \text{ even,} \\ (n+1)/2 & n \text{ odd.} \end{cases}$$

For n even this lower bound is obtained by taking for G_1 $n/2$ disjoint edges and for G_2 the graph consisting of $n/2$ isolated points and $C_{n/2}$ (where C_l stands for a cycle of length l).

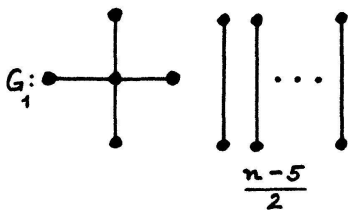
For odd $n, n \geq 21$ this lower bound is obtained by taking for G_1



and for G_2 the graph $K_i \setminus C_j$ plus $n-i$ isolated points, where i is the smallest integer such that

$$\binom{i}{2} \geq \frac{n+1}{2}, \quad \text{and} \quad j = \binom{i}{2} - \frac{n+1}{2}$$

and where $K_i \setminus C_j$ denotes the graph obtained from K_i by deleting the edges of a C_j . This construction works if G_2 has no points with valency 1 or 2, i.e. for $i \geq 6$ and thus for $n \geq 21$. For $n=11$ and $n=19$ there is nothing to delete in K_n while for $n=15$ and 17 one can delete two resp. three disjoint edges in K_i . For $n=5, 7, 9$ and 13 one easily checks that $\min e_n = (n+3)/2$, which can be realized by the graphs



$G_2 = C_{(n+3)/2}$ plus $(n-3)/2$ isolated points. Since it is easily checked that $e_4 = 3$, we thus have the following result:

$$\max e_n = \begin{cases} 3 & n=4 \\ \binom{n}{2} - \frac{n}{2} & n \text{ even, } n \geq 6 \\ \binom{n}{2} - \frac{n+1}{2} & n \text{ odd, } n \neq 5, 7, 9, 13 \\ \binom{n}{2} - \frac{n+3}{2} & n=5, 7, 9, 13 \end{cases}$$

Weitere Lösungen sandten P. Hajnal (Szeged, Ungarn), J. Schaer (Calgary, CDN).

Aufgabe 838. Let x_1, \dots, x_k be positive real numbers. Show that if

$$[n(x_1 + x_2 + \dots + x_k)] = [nx_1] + [nx_2] + \dots + [nx_k]$$

for all positive integers n , then at most one of x_1, \dots, x_k is nonintegral.

M. S. Klamkin, A. Liu, Alberta, Canada

Solution: Let $x_i = [x_i] + r_i$, $0 \leq r_i < 1$, $i = 1, \dots, k$.

Clearly we can replace each x_i by the corresponding r_i without affecting the validity of the statement. Furthermore, if

$$[n(r_1 + r_2 + \dots + r_k)] = [nr_1] + [nr_2] + \dots + [nr_k] \quad (1)$$

holds for some n , with given r_1, r_2, \dots, r_k , then the same equality will hold for the same n , with r_1, r_2, \dots, r_{k-1} . This is because

$$\begin{aligned} [n(r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1} + r_k)] &\geq [n(r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1})] + [nr_k] \\ &\geq [nr_1] + [nr_2] + \dots + [nr_{k-1}] + [nr_k]. \end{aligned}$$

Consequently, if (1) holds, then it is true also for the same n , and any two of the r_i , say r_1, r_2 . We shall therefore prove that if (1) holds for two numbers, r_1, r_2 , $0 \leq r_1 < 1$, $0 \leq r_2 < 1$, and all positive integers n , then only one of r_1, r_2 can be non zero. Assume the contrary and let us express both r_1, r_2 in the binary system,

$$r_1 = 2^{-a_1} + \dots + 2^{-a_s}, \quad r_2 = 2^{-b_1} + \dots + 2^{-b_t},$$

where the a_i, b_j are positive integers, arranged in increasing order, and assume that $b_t \geq a_s$. If $r_1 + r_2 \geq 1$, then (1) does not hold already for $n = 1$. Assume therefore that $r_1 + r_2 < 1$, and choose

$$n = 2^{b_t} - 1.$$

Consider both sides of (1) with this n . The left hand side is

$$\begin{aligned} [n(r_1 + r_2)] &= \left[\sum_{i=1}^s 2^{b_t - a_i} + \sum_{j=1}^t 2^{b_t - b_j} - (r_1 + r_2) \right] \\ &= \sum_{i=1}^s 2^{b_t - a_i} + \sum_{j=1}^t 2^{b_t - b_j} - 1 \end{aligned}$$

(because $r_1 + r_2 < 1$), whereas the right hand side is

$$\begin{aligned}
 [nr_1] + [nr_2] &= \left[\sum_{i=1}^s 2^{b_i - a_i} - r_1 \right] + \left[\sum_{j=1}^t 2^{b_j - b_j} - r_2 \right] \\
 &= \sum_{i=1}^s 2^{b_i - a_i} - 1 + \sum_{j=1}^t 2^{b_j - b_j} - 1.
 \end{aligned}$$

Clearly, $[n(r_1 + r_2)] \neq [nr_1] + [nr_2]$, which proves the statement.

Esther Szekeres, Turramurra, Australia

Bemerkung der Redaktion: Die Lösung für den Fall $k=2$ gibt D.J. Newman (Problem 4814, Am. Math. Monthly 65, 713, 1958). Der Beweis des Aufgabenstellers ergibt sich daraus durch Induktion bez. k .

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), H. Warncke (Porto Alegre, Brasilien).

Aufgabe 839. Man bestimme alle Quadrupel verschiedener natürlicher Zahlen, von denen jede Zahl Teiler der Summe der drei anderen ist. P. Hohler, Olten

Lösung: Für ein Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) bedeute $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Aus $x_i | s$ folgt die Existenz natürlicher Zahlen y_i mit $x_i = s/y_i$. Einsetzen in obige Gleichung führt auf

$$1 = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}.$$

Aus den sechs möglichen Zerlegungen von 1 als Summe von vier verschiedenen Stammbrüchen erhält man die sechs Lösungsscharen $(21s, 14s, 6s, s)$, $(12s, 8s, 3s, s)$, $(9s, 6s, 2s, s)$, $(15s, 10s, 3s, 2s)$, $(10s, 5s, 4s, s)$ und $(6s, 3s, 2s, s)$ mit dem natürlichen Parameter s .

Schülerproblemgruppe
Städtisches Literaturgymnasium, Bern-Kirchfeld

Bemerkung der Redaktion: Für die Lösung der im obigen Beitrag erwähnten diophantischen Gleichung siehe z.B.: W. Sierpinski, 250 problems in Elementary Number Theory, New York 1970, problem 160.

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), J. Fehér (Pécs, Ungarn), J.T. Groenman (Groningen, NL), P. Hajnal (Szeged, Ungarn), W. Janous (Innsbruck, A), R. Kamber (Laupersdorf), H.-J. Kleck (Bern), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), I. Paasche (München, BRD), Schülerproblemgruppe Rämibühl (Zürich), E.P. Starke (Plainfield, USA), U. Tipp (Soest, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 840A. Gesucht ist das Minimum der Längensumme $l(C_1) + l(C_2)$ zweier einfach geschlossener punktfremder Kurven C_1, C_2 , welche die Einheitssphäre S^2 in drei flächengleiche Teile zerlegen. Man verallgemeinere das Problem auf den Fall von n Kurven. H. Flanders, Boca Raton, USA

Lösung: $n=2$. Wenn zwei einfach geschlossene Kurven die Kugel­fläche in drei flächengleiche Teile zerlegen, so schliesst jede von ihnen $\frac{1}{3}$ der Kugel­fläche ein. Die Kurve kleinster Länge mit dieser Eigenschaft ist ein Kreis (siehe z. B. [1]). Man teile also einen Durchmesser der Kugel in drei gleiche Teile, lege durch jeden der beiden Teilpunkte eine Ebene senkrecht zum Durchmesser und schneide diese Ebenen mit der Kugel­fläche. So erhält man zwei Kurven mit der gewünschten Eigenschaft. Jede einzelne ist minimal, also ist auch die Summe ihrer Längen minimal.

$n=3$. Man ziehe in der Äquatorebene drei Radien unter Winkeln von 120° , halbiere jeden Radius und lege durch die Teilpunkte Ebenen senkrecht zu den Radien. So erhält man drei Kreise, die einander berühren und je $\frac{1}{4}$ der Kugel­fläche einschliessen. Der Flächeninhalt des Restes ist ebenfalls ein Viertel, aber der Rest ist nicht zusammenhängend, und die Kreise sind nicht punktfremd. Lässt man also die Bedingung der Punktfremdheit fallen, so existiert ein Minimum für die Summe der Längen der Kurven, im Sinne der Aufgabenstellung gibt es jedoch nur eine untere Grenze dafür.

$n=4$. Man ziehe Radien zu den Ecken eines der Kugel einbeschriebenen regulären Tetraeders und trage auf jedem derselben vom Mittelpunkt aus $\frac{3}{5}$ seiner Länge ab. Durch jeden der vier Teilpunkte lege man eine Ebene senkrecht zum Radius. So erhält man vier punktfremde Kreise, die je $\frac{1}{5}$ der Kugel­fläche einschliessen, also die gestellte Bedingung erfüllen. Die Summe ihrer Längen ist minimal.

$n=5$. Beschreibt man um die 6 Ecken eines regulären Oktaeders gleich grosse einander berührende Kreise, so schliesst jeder derselben eine Fläche ein, die kleiner als $\frac{1}{6}$ der Kugel­fläche ist. Will man also die gestellte Flächenbedingung durch Kreise erfüllen, so muss man die Radien und damit auch die Abstände zwischen den Mittelpunkten grösser machen als in der eben beschriebenen Figur. Dann aber haben keine fünf Kreise auf der Kugel Platz. Für den Beweis siehe etwa [2]. Mit ausserhalb voneinander liegenden Kurven kann man also das Minimum der Längensumme nicht erreichen. Jede solche Konfiguration von Kurven, die die Flächenbedingung erfüllt, kann durch kleine Änderungen so modifiziert werden, dass die Summe der Längen kleiner wird. Ein absolutes Minimum gibt es nicht. Es gibt aber ein lokales Minimum, das man so erhalten kann: Einen Radius teilt man in drei gleiche Teile und legt durch jeden Teilpunkt eine Ebene senkrecht zum Radius. So erhält man zwei konzentrische Kreise, von denen der innere $\frac{1}{6}$, der äussere $\frac{2}{6}$ der Kugel­fläche einschliesst. In das Aussengebiet des letzteren Kreises kann man drei weitere punktfremde Kreise hineinlegen, die je $\frac{1}{6}$ der Kugel­fläche einschliessen. Ein weiteres lokales Minimum existiert für jedes n : Man teile einen Durchmesser in $n+1$ gleiche Teile und lege durch jeden der n Teilpunkte eine Ebene senkrecht zum Durchmesser. Diese Ebenen teilen die Kugel in $n+1$ flächengleiche Teilgebiete, und bei jeder kleinen Änderung der n Grenzkurven, bei denen die Flächeninhalte erhalten bleiben, kann die Summe der Kurvenlängen nicht kleiner werden.

$n=6$. Die Minimalfigur erhält man analog zum Fall $n=4$ mit Hilfe eines der Kugel einbeschriebenen Oktaeders.

$n=7$. Dieser Fall kann genauso behandelt werden wie $n=5$, denn auch bei 7 Punkten auf der Kugel weiss man nach [2] genau, wie gross die Kugel sein muss,

damit die Punkte unter Einhaltung eines vorgegebenen Mindestabstandes gelagert werden können. Das Ergebnis ist dasselbe: Es gibt zwar lokale Minima, aber kein absolutes Minimum.

$n > 7$. Auch in diesen Fällen ist es unmöglich, n punktfremde Kreise so auf der Kugel zu lagern, dass jeder eine Fläche von einem $(n+1)$ -tel der Kugeloberfläche berandet. Teilt man nämlich einen Durchmesser AB in $n+1$ gleiche Teile und legt durch den ersten Teilpunkt eine zu AB senkrechte Ebene, so schneidet diese aus der Kugel einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 4\sqrt{n} R / (n+1)$ ($R =$ Kugelradius) aus, die genau den $(n+1)$ -ten Teil der Kugeloberfläche berandet. Damit zwei solche Kreise mit Mittelpunkten A und C auf der Kugel sich nicht schneiden, muss der Abstand $|AC|$ mindestens d betragen. Wählt man d als Längeneinheit, so ist also $R = (n+1)/(4\sqrt{n})$. Nun hat L. Fejes Tóth bewiesen (für den Beweis siehe etwa [3]): Wenn n Punkte auf der Kugel den Mindestabstand Eins haben, dann muss

$$R \geq \left\{ 4 - \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right\}^{-1/2}$$

sein. Es müsste also gelten:

$$\frac{n+1}{4\sqrt{n}} \geq \left\{ 4 - \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right\}^{-1/2}$$

was sich zu

$$\sin \left(\frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) \geq \frac{n+1}{2(n-1)} \quad (*)$$

umformen lässt. Für $n=3$ gilt hierbei das Gleichheitszeichen, wie zu erwarten war. Für alle $n \geq 8$ ist $(*)$ nicht mehr erfüllt, also die gewünschte Lagerung von n Kreisen nicht mehr möglich.

Schlussfolgerung: Nur für $n=2, 4$ und 6 existiert eine Minimalfigur im Sinne der Aufgabenstellung. In allen anderen Fällen gibt es für die Längensumme nur lokale Minima.
B. L. van der Waerden, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 F. Bernstein: Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene. *Math. Ann.* 60, 117–136 (1905).
- 2 K. Schütte und B.L. van der Waerden: Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? *Math. Ann.* 123, 96–124 (1951).
- 3 W. Habicht und B.L. van der Waerden: Lagerung von Produkten auf der Kugel. *Math. Ann.* 123, 223–234 (1951).

Einen weiteren Beitrag sandte J. Schaer (Calgary, CDN).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. Oktober 1981* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625B (Band 25, S.68), Problem 645A (Band 26, S.46), Problem 672A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724A (Band 30, S.91), Problem 764A (Band 31, S.44).

Aufgabe 857. Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $|AB| = |AC| \neq |BC|$ bezeichnen w_a bzw. w'_b die Innenwinkelhalbierende durch A bzw. die Aussenwinkelhalbierende durch B . Das Dreieck soll bei gegebenen w_a, w'_b mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Genau für welche rationalen Werte des Verhältnisses $k = w_a/w'_b$ ist dies möglich?

J. T. Groenman, Groningen, NL

H. Kappus, Rodersdorf

Aufgabe 858. P bezeichne einen inneren Punkt der vom Umkreismittelpunkt M und Inkreismittelpunkt I eines nicht regulären Dreiecks $A_1A_2A_3$ begrenzten Strecke. Die Cevatransversalen A_iP treffen die Gegenseiten in Q_i , und es werde $|PQ_i| = x_i, |A_iP| = y_i (i = 1, 2, 3)$ gesetzt. Man beweise die Existenz eines Punktes P derart, dass $y_1 + y_2 + y_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3)$.

F. Leuenberger, Feldmeilen

Aufgabe 859. Es seien $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die (n, n) -Matrix $A = (a_{jk})$ mit

$$a_{jk} = \begin{cases} s_k & \text{für } j = 1, \quad k = 1, \dots, n \\ (t_k/t_j) \cdot a_{j-1, k-1} & \text{für } j = 2, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n \end{cases}$$

heisse verallgemeinerte zyklische Matrix. Man zeige durch explizite Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von A , dass jede verallgemeinerte zyklische Matrix diagonalisierbar ist.

A. Fässler, Biel-Bienne

Literaturüberschau

W. Ast und B. Hafenbrak: Einführung in die Analysis, Band 1. Uni-Taschenbücher, Band 780, 173 Seiten, 65 Abbildungen, DM 13.80. Schöningh, Paderborn 1978.

Mit Hilfe der Peano-Axiome werden die natürlichen Zahlen eingeführt, und über die ganzen Zahlen wird der rationale Zahlenkörper aufgebaut. Zur Definition der reellen Zahlen benützen die Autoren Cauchy-Folgen. Mengentheoretische Grundlagen dienen zur Darstellung reeller Funktionen. Der Behandlung der Differentialrechnung folgt die Betrachtung stetiger Funktionen.

Das Buch richtet sich an Mathematikstudenten in den ersten Semestern. Die wohldotierte Stoffauswahl, zahlreiche Figuren und Beispiele führen den Leser in die Grundbegriffe und ihre wichtigsten Zusammenhänge ein. Übungsaufgaben, deren Lösungen in einem Anhang beigelegt sind, dienen zur Vertiefung und Ergänzung des Stoffes.

W. Holenweg