

# Projektive Eigenschaften des abgestumpften Würfels

Autor(en): **Hohenberg, Fritz**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 3

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-35544>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 36

Heft 3

Seiten 49–72

Basel, 10. Mai 1981

## Projektive Eigenschaften des abgestumpften Würfels

Herrn Prof. Dr. Ernst Walter Trost zum 70. Geburtstag gewidmet

Der «abgestumpfte Würfel»  $\Pi$  ist das einzige archimedische Polyeder der Hexaedergruppe  $\Gamma$ , das keine Symmetrieebenen besitzt.  $\Pi$  hat 24 Ecken, 60 Kanten und wird von 6 Quadraten und 32 gleichseitigen Dreiecken begrenzt. In jeder Ecke von  $\Pi$  treffen ein Quadrat und vier gleichseitige Dreiecke zusammen.

P. Huybers und H. S. M. Coxeter fanden ein Oktaeder  $\Pi_3$  mit der Eigenschaft, dass durch jede Ecke von  $\Pi_3$  vier (verlängerte) Kanten von  $\Pi$  gehen [Math. Rep. Acad. Sci., The Royal Society of Canada 1, 269–274 (1979)]. Das ist eine projektive Eigenschaft; sie kommt auch kollinear verwandten Polyedern zu.

Hier wird gezeigt: *Ausser den Ecken von  $\Pi$  und  $\Pi_3$  gibt es im Kantensystem von  $\Pi$  noch 120 weitere Schnittpunkte; sie bilden die Ecken von 5 gleicheckigen (darunter 3 symmetrischen) Polyedern von  $\Gamma$ . Ferner wird ein gleichflächiges Polyeder  $\Pi_2$  angegeben, in dessen 24 Ebenen die Ecken von  $\Pi$  und  $\Pi_3$  und auch alle 120 hier gefundenen Schnittpunkte liegen. Mit Hilfe des zu  $\Pi$  polaren Polyeders  $\bar{\Pi}$  werden auch die gleichflächigen Polyeder bestimmt, die von den Verbindungsebenen komplanarer Kanten von  $\Pi$  gebildet werden; eines ist symmetrisch, drei sind unsymmetrisch. Zahlreiche weitere Inzidenzen erhält man, wenn man zu den Kanten von  $\Pi$  die Diagonalen hinzunimmt.* – In Abschnitt 1 wird zunächst das allgemeine gleicheckige Polyeder von  $\Gamma$ , in Abschnitt 2 der Sonderfall  $\Pi$  bestimmt.

Eine analoge Untersuchung des abgestumpften Dodekaeders soll folgen.

### 1. Das allgemeine gleicheckige Polyeder $\Pi(p, q)$ der Hexaedergruppe $\Gamma$

Ein Würfel sei mit  $\Pi_4$  bezeichnet, seine  $\nu$ -zähligen Achsen mit  $a_\nu$  ( $\nu=4, 3, 2$ ), seine Symmetrieebenen mit  $\sigma$ . Der Mittelpunkt  $M$  von  $\Pi_4$  sei Ursprung, die Achsen  $a_4$  seien Achsen kartesischer Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ . Figur 1 zeigt  $\Pi_4$  in dünnen Linien, unten den Grundriss auf  $\sigma(x_3=0)$ , oben den Aufriss auf  $\sigma(x_1+x_2=0)$ . Als Punkt erscheint im Grundriss  $a_4(x_1=x_2=0)$ , im Aufriss  $a_2(x_1-x_2=x_3=0)$ . Hat  $\Pi_4$  die Kantenlänge 2, so sind  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  die Ecken von  $\Pi_4$ .

Die Hexaedergruppe  $\Gamma$ , deren 24 Drehungen  $\Pi_4$  in sich überführen, führt einen Punkt  $l$  allgemeiner Lage in 24 Punkte über. Liegt  $l$  in einer Symmetrieebene, so ist alles weitere trivial. Wir setzen

$$l(p, q, 1) \quad \text{mit} \quad 1 > p > q > 0 \tag{1}$$

voraus.  $\Gamma$  führt  $l$  in 24 Punkte über; in den Ebenen  $x_3 = \pm 1, \pm p, \pm q$  liegen je vier dieser Punkte (und sie bilden ein Quadrat). Die Bezeichnung in Figur 1 ist so gewählt, dass  $1, 2, 3, 4$  in  $x_3 = 1$  liegen,  $5, 6, 7, 8$  in  $x_3 = p$ ,  $1', 2', 3', 4'$  in  $x_3 = q$ , also

$$\begin{array}{llll} 1(p, q, 1), & 2(-q, p, 1), & 3(-p, -q, 1), & 4(q, -p, 1), \\ 5(q, 1, p), & 6(-1, q, p), & 7(-q, -1, p), & 8(1, -q, p), \\ 1'(1, p, q), & 2'(-p, 1, q), & 3'(-1, -p, q), & 4'(p, -1, q). \end{array} \quad (2)$$

Daraus entstehen durch  $180^\circ$ -Drehung um  $a_2$  ( $x_1 - x_2 = x_3 = 0$ ) die Punkte  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$  (in  $x_3 = -1$ ),  $\bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}$  (in  $x_3 = -p$ ),  $\bar{1}', \bar{2}', \bar{3}', \bar{4}'$  (in  $x_3 = -q$ ), z. B.  $\bar{1}'(p, 1, -q)$ .

Das (konvexe) Polyeder mit diesen 24 Ecken heisse  $\Pi(p, q)$ . Es ist gleichseitig;  $\Gamma$  führt die von einer Ecke ausgehenden Kanten in die von jeder anderen Ecke ausgehenden Kanten über.  $\Pi(p, q)$  besitzt

- 6 Quadrate  $\Delta_4$  in den Ebenen  $\varepsilon_4$  ( $x_v = \pm 1$ ), begrenzt von 24 Kanten  $k_4$ ,
- 8 gleichseitige Dreiecke  $\Delta_3$ , deren Ebenen  $\varepsilon_3$  ( $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 1 + p + q$ ) zu den dreizähligen Achsen  $a_3$  von  $\Pi_4$  normal sind. Die Ebenen  $\varepsilon_3$  begrenzen ein Oktaeder  $\Pi_3$ . Die Seiten von  $\Delta_3$  sind 3 Kanten  $k_3$  von  $\Pi(p, q)$ , die eine  $a_3$  normal kreuzen, z. B. kreuzen die Seiten von  $\Delta_3(11'5)$  und die von  $\Delta_3(\bar{3}\bar{3}'7)$  die  $a_3(x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1 : 1)$  normal.
- Weitere 24 Dreiecke  $\Delta_2$  in Ebenen  $\varepsilon_2$ . Jedes ist von einer Kante  $k_4$ , einer Kante  $k_3$  und einer Kante  $k_2$  (z. B.  $1'\bar{1}'$ ) begrenzt.

Sichtbare Kanten  $k_2$  sind in Figur 1 durch Doppellinien dargestellt, unsichtbare  $k_2$  kurz gestrichelt. Sichtbare Kanten  $k_3$  und  $k_4$  sind in vollen Linien gezeichnet, unsichtbare lang gestrichelt.

$\Pi(p, q)$  hat 24 Kanten  $k_4$ , 24 Kanten  $k_3$ , aber nur 12 Kanten  $k_2$ . Denn jede  $k_2$  (z. B.  $1'\bar{1}'$ ) schneidet eine  $a_2$  (im Beispiel:  $x_1 - x_2 = x_3 = 0$ ) im Mittelpunkt von  $k_2$  normal, daher gestattet  $k_2$  die  $180^\circ$ -Drehung um eine  $a_2$ , also eine zweigliedrige Untergruppe von  $\Gamma$ . An die Seiten eines Quadrats  $\Delta_4$  grenzen 4 Dreiecke  $\Delta_2$ , an die Seiten eines Dreiecks  $\Delta_3$  grenzen 3 Dreiecke  $\Delta_2$ .

$k_v$  ( $v = 4, 3, 2$ ) habe die Länge  $l_v$ . Nach (2) folgt [etwa aus  $\Delta_2(125)$ ]

$$l_4^2 = 2(p^2 + q^2), \quad l_3^2 = 2(1 - p - q + p^2 - pq + q^2), \quad l_2^2 = 2(1 - p)^2 + 4q^2. \quad (3)$$

## 2. Der abgestumpfte Würfel des Archimedes

Aus  $\Pi(p, q)$  erhält man den abgestumpften Würfel  $\Pi$ , wenn  $l_2 = l_3 = l_4$  ist. Das ergibt nach (3) die (linear abhängigen) Gleichungen

$$l_2 = l_3 \quad \text{oder} \quad p - q - pq - q^2 = 0, \quad (4)$$

$$l_2 = l_4 \quad \text{oder} \quad 1 - 2p + q^2 = 0, \quad (5)$$

$$l_3 = l_4 \quad \text{oder} \quad 1 - p - q - pq = 0. \quad (6)$$

Eliminiert man aus (4)–(6) erstens  $q$ , zweitens  $p$ , so folgt

$$p^3 + p^2 + p - 1 = 0 \quad (7)$$

$$q^3 + q^2 + 3q - 1 = 0. \quad (8)$$

Diese kubischen Gleichungen haben je eine reelle Wurzel, nämlich

$$p = (-1 + \sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17 - 3\sqrt{33}}) / 3 \approx 0'544, \quad (9)$$

$$q = (-1 + \sqrt[3]{26 + 6\sqrt{33}} + \sqrt[3]{26 - 6\sqrt{33}}) / 3 \approx 0'296. \quad (10)$$

Auf die konjugiert komplexen Polyeder, die zu den komplexen Wurzeln von (7) und (8) gehören, sei nicht eingegangen. Sie könnten in bekannter Weise durch reelle Substrate veranschaulicht werden.

Addition von (6) und (7) ergibt  $(p^2 - q)(p + 1) = 0$ . Wegen (1) folgt

$$q = p^2. \quad (11)$$

Ersetzt man  $q$  in (8) durch  $p^2$ , so folgt die Zerlegung von (8) in die Faktoren  $p^3 + p^2 + p - 1$  und  $p^3 - p^2 + p + 1$ . Der erste Faktor ist der Ausdruck in (7), der zweite ergibt nullgesetzt die Gleichung mit der Wurzel  $-p$ ; das bedeutet den Übergang von  $\Pi$  zu einem anderen abgestumpften Würfel, der aus  $\Pi$  durch Spiegelung an  $M$  entsteht.

$\Pi$  hat die Kantenlänge  $l = l_4 = l_3 = l_2$ , nämlich

$$l = \sqrt{2(p^2 + 2p - 1)} = \sqrt{2(q^2 + q)} \approx 0'876. \quad (12)$$

Die Koeffizienten von (7) oder (8) ergeben die kubische Gleichung

$$l^6 + 12l^4 + 32l^2 - 32 = 0 \quad (13)$$

für  $l^2$ . Sie hat die einzige reelle Wurzel

$$l^2 = 2(-6 + \sqrt[3]{54 + 6\sqrt{33}} + \sqrt[3]{54 - 6\sqrt{33}}) / 3. \quad (14)$$

Figur 1 stellt  $\Pi$  in Grund- und Aufriss dar. Beide Bilder sind symmetrisch bezüglich des Bildes von  $M$ . Von der Sichtbarkeit abgesehen, ist der Grundriss auch symmetrisch zu den Geraden  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 \pm x_2 = 0$ , und der Aufriss symmetrisch zur  $x_3$ -Achse und zu  $\sigma(x_3 = 0)$ .

Wir bestimmen noch die Radien von vier Kugeln um  $M$ .  $R$  sei der Radius der Umkugel von  $\Pi$ .  $r$  sei der Radius der Kantenkugel, die jede Kante von  $\Pi$  in deren Mittelpunkt berührt, z. B.  $k_2(l' \bar{l}')$  in  $((1+p)/2, (1+p)/2, 0)$ .  $\rho_3$  sei der Radius der Kugel, die die Ebene jedes Dreiecks  $\Delta_3$  oder  $\Delta_2$  in dessen Mittelpunkt berührt, z. B. die Ebene  $\varepsilon_2$  von  $\Delta_2(l' l' 5)$  in  $((1+p+p^2)/3, (2+p)/3, p/3)$ .  $\rho_4$  sei der Radius der Kugel, die die Ebene jedes Quadrats  $\Delta_4$  in dessen Mittelpunkt berührt. Es folgt



$$R = \sqrt{\frac{l^2}{2} + 1} = \sqrt{p(p+2)}, \quad r = \sqrt{\frac{l^2}{4} + 1} = (1+p)/\sqrt{2},$$

$$\rho_3 = \sqrt{\frac{l^2}{6} + 1} = p^{-1}/\sqrt{3}, \quad \rho_4 = 1. \quad (15)$$

In Figur 1 ist  $2r$  der Abstand von  $k_2(2'\bar{4}')$  und  $k_2(\bar{2}'4')$ . Im Aufriss erscheinen  $\Delta_3(22'\bar{6})$  und  $\Delta_3(\bar{2}\bar{2}'\bar{6})$  als Parallele im Abstand  $2\rho_3$ , die Quadrate in  $x_3 = 1$  und  $x_3 = -1$  als Parallele im Abstand  $2\rho_4$ .

### 3. Inzidenzen im Kantensystem des abgestumpften Würfels

Während  $\Pi(p, q)$  im allgemeinen keine Paare komplanarer Kanten besitzt, existieren Paare komplanarer Kanten bei  $\Pi$ .

Es sollen nun alle Paare komplanarer Kanten  $k_\mu, k_\nu$  ( $\mu, \nu = 4, 3, 2$ ) von  $\Pi$  bestimmt werden. Solche Kanten schneiden sich (in ihrer Verlängerung) in einem mit  $k_\mu \cap k_\nu$  oder  $(\mu\nu)$  bezeichneten Punkt. Die Verbindungsebene heiße  $[\mu\nu]$ . Wir definieren 12 Ebenen  $\varepsilon^I$  und 12 Ebenen  $\varepsilon^{II}$ :

$$\varepsilon^I(p x_m \pm x_n = 0) \quad \text{und} \quad \varepsilon^{II}(p^2 x_m \pm x_n = 0), \quad (m, n = 1, 2, 3). \quad (16)$$

Es genügt, eine Teilfigur  $\phi$  von  $\Pi$  zu betrachten, bestehend aus dem Quadrat  $1234$  und 12 gleichseitigen Dreiecken, die mit ihm eine Kante oder Ecke gemein haben.  $\phi$  ist symmetrisch zu

$$\varepsilon_0^I(p x_1 - x_2 = 0) \quad \text{und} \quad \varepsilon_0^{II}(x_1 - p^2 x_2 = 0) \quad (17)$$

(Fig. 1, Grundriss). Die Spiegelung an  $\varepsilon_0^I$  oder  $\varepsilon_0^{II}$  führt  $\phi$  in sich über, jedoch  $\Pi$  in einen anderen abgestumpften Würfel  $\Pi'$ , der  $\phi$  enthält!

(Bei den Rechnungen zu den folgenden Formeln wurden rationale Funktionen von  $p$  mittels (7) passend umgeformt. Z. B. ist  $p^3 = -p^2 - p + 1, p^4 = 2p - 1, p^{-1} = p^2 + p + 1, p^{-2} = p^2 + 2p + 2$ .)

#### 3.1. Inzidenzen, die aus Spiegelungen an den Ebenen $\varepsilon^I$ folgen

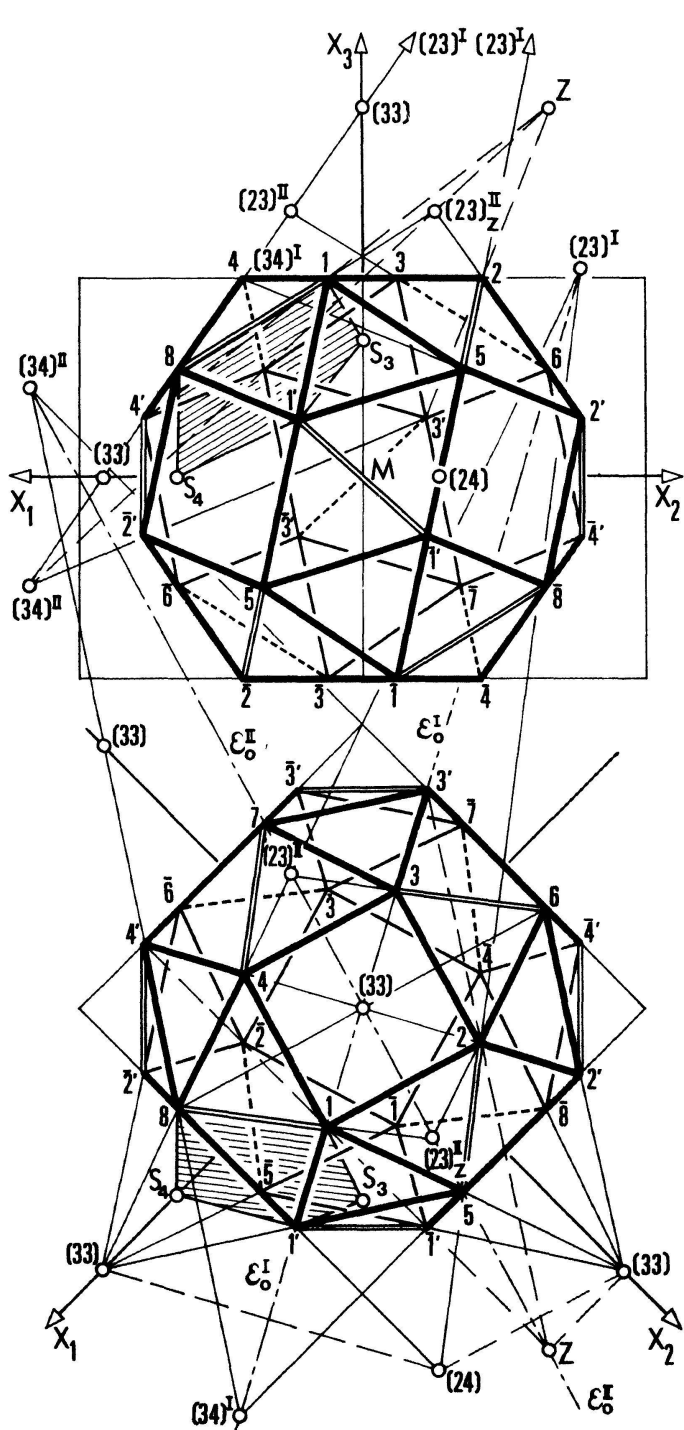
3.11. *Schnittpunkte* (33) (siehe Einleitung).  $k_3(11')$  und  $k_3(33')$  liegen in  $\varepsilon_0^I$ , daher existiert

$$(33) = (0, 0, p^{-1}), \quad [33] = \varepsilon_0^I. \quad (18)$$

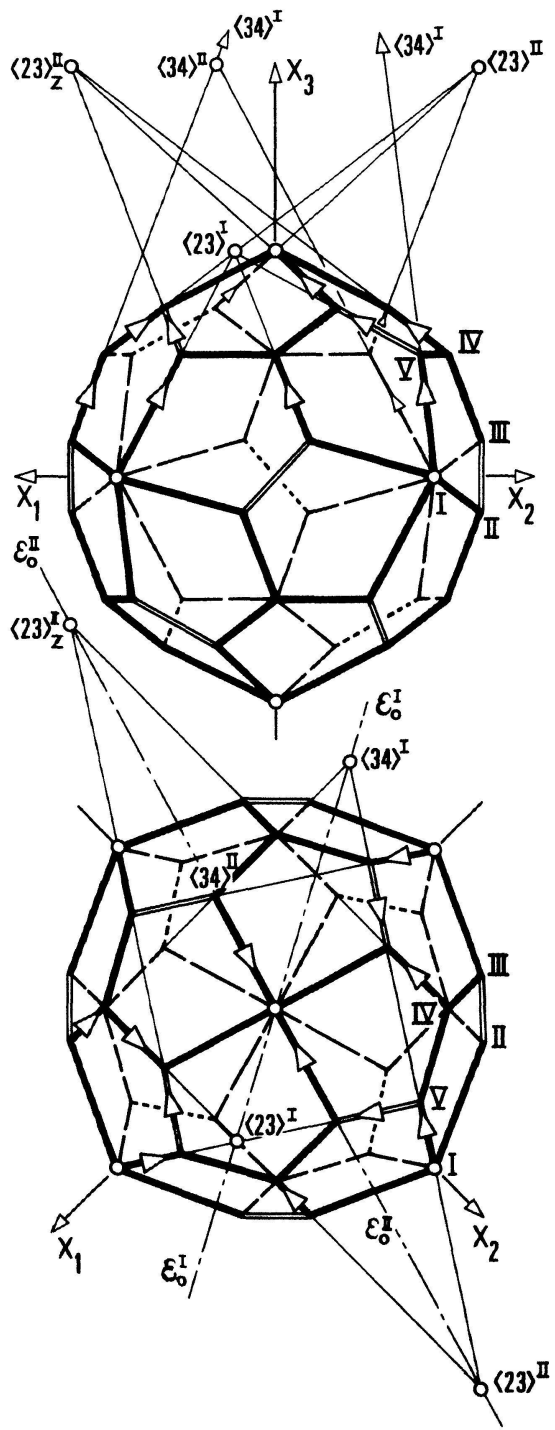
90°-Drehung um  $a_4(x_1 = x_2 = 0)$  ergibt, dass  $(0, 0, p^{-1})$  zugleich  $k_3(22') \cap k_3(44')$  ist. Durch  $\Gamma$  geht (33) in die Ecken des Oktaeders  $\Pi_3$  über. In jeder Ecke von  $\Pi_3$  schneiden sich 4 Kanten  $k_3$  von  $\Pi$ . Die Ebenen  $\varepsilon_3$  der Seitenflächen von  $\Pi_3$  sind  $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 = p^{-1}$ .

3.12. *Schnittpunkte (23)<sup>I</sup> und (34)<sup>I</sup>*. Die Spiegelung an  $\varepsilon_0^I$  vertauscht  $\varepsilon_2(22'5)$  und  $\varepsilon_3(44'8)$ . Auf der Schnittgeraden dieser zwei Ebenen liegen daher in  $\varepsilon_0^I$  die Punkte  $k_3(22') \cap k_3(44') = (33) = (0, 0, p^{-1})$  und  $k_2(25) \cap k_3(48) = (23)^I$  und  $k_3(4'8) \cap k_4(2'5) = (34)^I$ . Es ist

$$(23)^I = (-p^{-2}, -p^{-1}, p^{-2}), \quad (34)^I = (p^{-1}, 1, 1). \tag{19}$$



Figur 1. Archimedisches Polyeder II (Grund- und Aufriss).



Figur 2. Dual-archimedisches Polyeder II (Grund- und Aufriss).

Nach (19) liegt  $(23)^I$  in  $\varepsilon_0^I$ , in  $\varepsilon^I(x_2 + p x_3 = 0)$ , in  $\sigma(x_1 + x_3 = 0)$ , in  $\varepsilon_3(x_1 - x_2 + x_3 = p^{-1})$ , in  $\varepsilon_3(-x_1 - x_2 - x_3 = p^{-1})$ .  $(34)^I$  liegt in  $\varepsilon_0^I$ , in  $\varepsilon^I(p x_1 - x_3 = 0)$ , in  $\sigma(x_2 - x_3 = 0)$ , ferner in  $\varepsilon_3(x_1 - x_2 + x_3 = p^{-1})$  und  $\varepsilon_3(x_1 + x_2 - x_3 = p^{-1})$ .

3.13. *Schnittpunkte (24)*. Die Spiegelung an  $\varepsilon_0^I$  führt  $k_3(48) \cap k_3(51') = (p^{-1}, 0, 0)$  in  $k_2(25) \cap k_4(81') = (24)$  über. Spiegelt man dann (24) an  $\varepsilon_0^{II}$ , so erhält man  $k_3(15) \cap k_3(62') = (0, p^{-1}, 0)$ . Daher ist (24) Schnittpunkt der Normalen aus  $(p^{-1}, 0, 0)$  zu  $\varepsilon_0^I$  mit der Normalen aus  $(0, p^{-1}, 0)$  zu  $\varepsilon_0^{II}$  (Fig. 1). Es ist

$$(24) = (1, 1 + p, 0). \quad (20)$$

Beim Übergang von  $\Pi$  zu  $\Pi'$  vertauschen (33) und (24) ihre Rollen.

Die Kugel um  $l$  mit dem Radius  $l$  schneidet die Umkugel von  $\Pi$  im Umkreis des Fünfecks  $481'52$ . Zu jeder Ecke von  $\Pi$  gehört also ein ebener Vierkantenzug von  $\Pi$ , bestehend aus den Endpunkten der von der Ecke ausgehenden Kanten.  $k_{3432}(481'52)$  liegt in der Ebene

$$[23]^I \equiv [24] \equiv [33] \equiv (p x_1 + p^2 x_2 + x_3 - 1 = 0). \quad (21)$$

In (21) liegen die Kanten, die sich in  $(23)^I$  und (24) schneiden, ferner  $k_3(48)$  und  $k_3(1'5)$  mit ihrem Schnittpunkt  $(33) = (p^{-1}, 0, 0)$ . (21) ist normal zu  $\varepsilon_0^I$ , zu  $\varepsilon^I(x_1 - p x_3 = 0)$  und zu  $\varepsilon^{II}(x_2 - p^2 x_3 = 0)$ .

Die Kanten mit dem Schnittpunkt  $(34)^I$  liegen in der Ebene

$$[34]^I \equiv (p^2 x_1 + p^3 x_2 - x_3 + p^2 = 0). \quad (22)$$

$[34]^I$  ist normal zu  $\varepsilon_0^I$  und zu  $\varepsilon^{II}(x_1 + p^2 x_3 = 0)$ .

### 3.2. Inzidenzen, die aus Spiegelungen an den Ebenen $\varepsilon^{II}$ folgen

3.21. *Schnittpunkte  $(23)^{II}$  und  $(34)^{II}$* . Die Spiegelung an  $\varepsilon_0^{II}$  vertauscht  $\varepsilon_2(33'6)$  mit  $\varepsilon_3(44'8)$ . Auf der Schnittgeraden dieser zwei Ebenen liegen daher in  $\varepsilon_0^{II}$  die Punkte  $k_3(33') \cap k_3(44') = (33) = (0, 0, p^{-1})$  und  $k_2(36) \cap k_3(48) = (23)^{II}$  und  $k_3(4'8) \cap k_4(3'6) = (34)^{II}$ . Es ist

$$(23)^{II} = (-\lambda p^3, -\lambda p, \lambda) \quad \text{mit} \quad \lambda = (1 - p + p^2)^{-1}, \quad (23)$$

$$[23]^{II} \equiv (p^2 x_1 + x_2 + x_3 - p = 0),$$

$$(34)^{II} = (-1, -p^{-2}, -p), \quad [34]^{II} \equiv (p^4 x_1 + p^2 x_2 - x_3 + p = 0). \quad (24)$$

$(23)^{II}$  liegt in  $\varepsilon_0^{II}$  und in  $\varepsilon^I(x_2 + p x_3 = 0)$ .  $[23]^{II}$  ist normal zu  $\varepsilon_0^{II}$ , zu  $\varepsilon^{II}(x_1 - p^2 x_3 = 0)$  und zu  $\sigma(x_2 - x_3 = 0)$ .  $(34)^{II}$  liegt in  $\varepsilon_0^{II}$  und in  $\varepsilon^I(p x_1 - x_3 = 0)$ .  $[34]^{II}$  ist normal zu  $\varepsilon_0^{II}$  und zu  $\varepsilon^{II}(x_2 + p^2 x_3 = 0)$ .

3.22. *Ebene Dreikantenzüge von  $\Pi$* .  $6348$  ist ein ebener Dreikantenzug  $k_{243}$  in der Ebene  $[23]^{II}$ . Seine Ebene ist nach Formel (23) parallel zu  $a_2(x_1 = 0, x_2 + x_3 = 0)$ .  $6348$  geht durch  $180^\circ$ -Drehung um  $a_4(x_1 = x_2 = 0)$  in  $k_{243}(8126)$  über, daraus erhält

man durch  $90^\circ$ -Drehung um die  $x_2$ -Achse  $k_{243}(\bar{2}\bar{5}1'1)$ , dessen Ebene zu  $a_2(x_1 - x_2 = 0, x_3 = 0)$  parallel ist und die daher im Aufriss als Gerade erscheint. Dasselbe gilt für die  $k_{243}$ , die aus  $\bar{2}\bar{5}1'1$  durch  $180^\circ$ -Drehung um  $a_2(x_1 - x_2 = 0, x_3 = 0)$  und daraus durch  $180^\circ$ -Drehung um  $a_4(x_1 = x_2 = 0)$  hervorgehen.

$\Pi$  besitzt 24 ebene Dreikantenzüge. Sie liegen in 12 Paaren paralleler Ebenen, zugleich in 6 Quadrupeln von Ebenen, die zu einer  $a_2$  parallel sind.

### 3.3. Die sechs Polyeder der Schnittpunkte

$\Gamma$  führt jeden Schnittpunkt  $(\mu\nu)$  zweier (verlängerter) Kanten von  $\Pi$  in die Ecken eines Polyeders  $\Pi(\mu\nu)$  über.

a)  $\Pi(33) = \Pi_3$  ist das Oktaeder mit den Ecken  $(\pm p^{-1}, 0, 0), (0, \pm p^{-1}, 0), (0, 0, \pm p^{-1})$ .  
 b)  $\Pi(23)^I, \Pi(34)^I, \Pi(24)$ . Die Streckung aus  $M$  mit dem Faktor  $p^{-2}$  führe  $\Pi_4$  in den Würfel « $p^{-2} \cdot \Pi_4$ » über. Nach (19) liegt  $(23)^I$  in  $\sigma(x_1 + x_3 = 0)$ , und wegen  $p^{-1} < p^{-2}$  liegt der Punkt  $(23)^I$  im Innern einer Kante von  $p^{-2} \cdot \Pi_4$ . Daher geht  $(23)^I$  durch  $\Gamma$  in die 24 Ecken eines Polyeders der Gruppe  $\Gamma$  über. Analog bei  $(34)^I$  mittels « $p^{-1} \cdot \Pi_4$ ». Es ist

$$\Pi(23)^I = (3, 4+4, 4+4), \quad s_3 = (1+p)\sqrt{2}, \quad s_8 = 2p^{-1}, \quad (25)$$

$$\Pi(34)^I = (2+2, 3, 2+2, 4), \quad s_3 = (p+p^2)\sqrt{2}, \quad s_4 = 2. \quad (26)$$

In jeder Ecke von  $\Pi(23)^I$  treffen ein gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge  $s_3$ ) und zwei halbreguläre Achtecke (Seitenlängen abwechselnd  $s_3$  und  $s_8$ , Innenwinkel  $135^\circ$ ) zusammen, in jeder Ecke von  $\Pi(34)^I$  ein gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge  $s_3$ ), ein Quadrat (Seitenlänge  $s_4$ ) und zwei Rechtecke (Seitenlängen  $s_3$  und  $s_4$ ).

$(24)$  liegt nach (20) in  $\sigma(x_3 = 0)$ . Mittels « $(1+p) \cdot \Pi_4$ » folgt

$$\Pi(24) = (3+3, 3+3, 4), \quad s_4 = \sqrt{2}, \quad s_6 = p\sqrt{2}. \quad (27)$$

In jeder Ecke treffen ein Quadrat (Seitenlänge  $s_4$ ) und zwei halbreguläre Sechsecke (Seitenlängen abwechselnd  $s_4$  und  $s_6$ , Innenwinkel  $120^\circ$ ) zusammen.

c)  $\Pi(23)^{II}$  und  $\Pi(34)^{II}$  sind spezielle unsymmetrische Polyeder der Gruppe  $\Gamma$ . Die Koordinaten ihrer 24 Ecken verhalten sich (bis auf Reihenfolge und Vorzeichen) bei  $\Pi(23)^{II}$  nach (23) wie  $1:p:p^3$ , bei  $\Pi(34)^{II}$  nach (24) wie  $1:p^2:p^3$  (hingegen bei  $\Pi$  wie  $1:p:p^2$ ).

*Ergebnis: Die Schnittpunkte (verlängerter) Kanten von  $\Pi$  sind: 1. Die Ecken des Oktaeders  $\Pi_3$ , 2. die Ecken dreier spezieller symmetrischer und zweier spezieller unsymmetrischer Polyeder der Gruppe  $\Gamma$ . Das sind  $6 \cdot 6 + 3 \cdot 24 + 2 \cdot 24 = 156$  Inzidenzen. Rechnet man die Fernpunkte paralleler Kanten  $k_4$  hinzu, ferner die Ecken von  $\Pi$ , in denen 5 Kanten 10 Inzidenzen entsprechen, so gibt es 408 Inzidenzen im Kanten-system von  $\Pi$ . Die Aufzählung ist vollständig.*

Die Hüllpolyeder der Verbindungsebenen komplanarer Kanten von  $\Pi$  ergeben sich in 5.2. aus dem zu  $\Pi$  dualen Polyeder.

### 3.4. Die Ebenen $\varepsilon_2$ der 24 Dreiecke $\Delta_2$ und ihr Polyeder $\Pi_2$

Ein Dreieck  $\Delta_2$  enthält je eine Kante  $k_4, k_3, k_2$  von  $\Pi$  und drei Ecken von  $\Pi$ . Ausserhalb der Ecken liegen auf  $k_2$  je zwei Punkte  $(23)^I, (24), (23)^{II}$ , die zum Mittelpunkt von  $k_2$  symmetrisch liegen (denn  $\Pi$  gestattet die  $180^\circ$ -Drehung um die Achse  $a_2$ , die  $k_2$  normal schneidet).  $k_3$  enthält je einen Punkt  $(33), (23)^I, (34)^I, (23)^{II}, (34)^{II}$ .  $k_4$  enthält je einen Punkt  $(24), (34)^I, (34)^{II}$ . Diese Punkte auf  $k_2, k_3, k_4$  sind voneinander verschieden, denn je zwei dieser Kanten haben nur eine Ecke von  $\Pi$  gemein. In der Ebene  $\varepsilon_2$  von  $\Delta_2$  liegen also 3 Ecken und  $6 + 5 + 3 = 14$  andere Kantenschnittpunkte von  $\Pi$ . Aus  $\varepsilon_2$  entsteht durch  $\Gamma$  ein gleichflächiges Polyeder  $\Pi_2$  der Gruppe  $\Gamma$ . Die Ebenen  $\varepsilon_2$  von  $\Pi_2$  enthalten alle 24 Ecken und 60 Kanten von  $\Pi$  und alle 156 Schnittpunkte verlängerter Kanten von  $\Pi$ .

Um die 24 besonderen Fünfecke  $\Delta_5$  zu bestimmen, von denen  $\Pi_2$  begrenzt ist, suchen wir etwa  $\Delta_5$  in  $\varepsilon_2(I'18)$  (Fig. 1, schraffiert).  $I'$  ist Schnittpunkt von  $\varepsilon_2(I'18), \varepsilon_2(I'\bar{I}'5), \varepsilon_2(I'\bar{I}'\bar{5})$ ; daher ist  $I'$  eine Ecke von  $\Delta_5$ .  $18$  ist Schnittkante zweier Dreiecke  $\Delta_2$ ; daher ist  $k_2(18)$  eine Seite von  $\Delta_5$ . Deren Endpunkte sind Schnittpunkte dreier Ebenen  $\varepsilon_2$ , sie sind daher Ecken von  $\Pi_2$ . Eine weitere Ecke von  $\Delta_5$  ist der Schnittpunkt  $S_3$  der Ebenen  $\varepsilon_2$  jener Dreiecke  $\Delta_2$ , die mit  $\Delta_3(I'51)$  je eine Kante  $k_3$  gemein haben. Eine weitere Ecke von  $\Delta_5$  ist der Schnittpunkt  $S_4$  der Ebenen jener 4 Dreiecke  $\Delta_2$ , die mit  $\Delta_4(I'8\bar{2}'\bar{5})$  je eine Kante  $k_4$  gemein haben. Man findet

$$S_3(x_1 = x_2 = x_3 = (2-p)^{-1}), \quad S_4((1-p+p^2)^{-1}, 0, 0). \quad (28)$$

In  $\varepsilon_2(I'18)$  liegt ausserhalb  $\Delta_5$  der auf  $k_3(11')$  liegende Punkt  $(33) = (0, 0, p^{-1})$ ; in ihm schneiden sich 4 Ebenen  $\varepsilon_2$ .

$\Pi_2$  hat denselben Inkugelradius  $\rho_3$  wie  $\Pi_3$ . Der abgestumpfte Würfel  $\Pi$  ist Durchschnitt von  $\Pi_4, \Pi_3$  und  $\Pi_2$ .

## 4. Inzidenzen im Geradensystem der Kanten und Diagonalen von $\Pi$

Von jeder Ecke von  $\Pi$  gehen 5 Kanten, 1 Quadratdiagonale und 17 Raumdiagonalen aus.  $K$  sei die Menge der 60 Kanten von  $\Pi$ .  $D$  sei die Menge der 12 Quadratdiagonalen und 204 Raumdiagonalen von  $\Pi$ . Die Inzidenzen in  $K$  sind in Abschnitt 3 untersucht. In  $K \cup D$  kommen weitere Inzidenzen hinzu: a) Schnittpunkte von Kanten mit Diagonalen; auch sie liegen in Ebenen  $\varepsilon_2$  von  $\Pi_2$ , b) Schnittpunkte von Diagonalen.

4.1. *Fernpunkte.* Normal zu  $\varepsilon_0^I$  sind  $67, 58, 24, 2'4'$ , normal zu  $\varepsilon_0^{II}$  sind  $3'4', 2'1', 68$  und  $k_4(12), k_4(34)$ . In den Fernpunkten der Normalen zu den 12 Ebenen  $\varepsilon^I$  und 12 Ebenen  $\varepsilon^{II}$  schneiden sich also je 4 bzw. 5 Geraden aus  $K \cup D$ . Das bedeutet  $72 + 120 = 192$  Inzidenzen in Fernpunkten.

4.2. *Schnittpunkte, die 4 Oktaeder bilden.* Es ist  $13 \cap 24 = (0, 0, 1)$ ,  $57 \cap 68 = (0, 0, p)$ ,  $I'3' \cap 2'4' = (0, 0, p^2)$ . Ferner ist  $13' \cap 24' \cap 31' \cap 42' = (0, 0, 1-p+p^2)$ . Jeder dieser Punkte geht durch  $\Gamma$  in die Ecken eines Oktaeders über.

4.3. *Dreifache Schnittpunkte, die einen Würfel bilden.* Es ist  $l'2 \cap 58 \cap l\bar{l}' = (p, p, p)$ .  $\Gamma$  führt diesen Punkt in die Ecken eines Würfels über.

4.4. *Diagonalenschnittpunkte in den Ebenen, die 2 oder 3 Kanten von  $\Pi$  enthalten.* Zwei komplanare Kanten  $k_\mu, k_\nu$ , die keine Ecke von  $\Pi$  gemein haben, bilden ein Trapez. Dessen Parallelseiten schneiden sich in einem Fernpunkt, die Schenkel im Punkt  $(\mu, \nu)$ . Der Schnittpunkt der Trapezdiagonalen heisse  $|\mu\nu|$ .  $(\mu\nu)$  und  $|\mu\nu|$  sind konjugiert bezüglich der Umkugel von  $\Pi$  (vollständiges Viereck!). So erhält man aus  $(23)^I, (34)^I, (23)^{II}, (34)^{II}$  je 24 Schnittpunkte  $|23|^I, |34|^I, |23|^{II}, |34|^{II}$  je zweier Raumdiagonalen von  $\Pi$ . Zu  $k_3(l'5) \cap k_3(84) = (33) = (p^{-1}, 0, 0)$  gehört  $|33| = (1 - p + p^2, p^3, p)$ , zu  $(24) = (1, 1 + p, 0)$  gehört  $|24| = (p, p, p)$  (siehe 4.3).  $|33|$  und  $|24|$  liegen symmetrisch zu  $\varepsilon_0^I$ . Der Punkt  $|33|$  liegt auch in  $\varepsilon^{II}$  ( $x_2 - p^2 x_3 = 0$ ).

4.5. *Diagonalschnittpunkte in den Ebenen, die vier Kanten von  $\Pi$  enthalten.* Die Ebene  $\varepsilon$ , in der der ebene Vierkantenzug  $25l'84$  liegt, enthält 4 Kanten, 1 Quadratdiagonale und 5 Raumdiagonalen von  $\Pi$ . Von diesen 10 Geraden schneiden sich in jeder Ecke vier, in  $(33), (24), (23)^I$  je zwei; zu ihnen gehören nach 4.4 die Punkte  $|33|, |24|$  und ein Punkt  $|23|^I = (p^2, p^3, 2p - p^2)$  in  $\varepsilon_0^I$ . Ferner existieren in  $\varepsilon$  noch drei Paare von Diagonalenschnittpunkten, symmetrisch zu  $\varepsilon_0^I$  liegend.

4.6. *Andere Schnittpunkte.* Als weiterer Schnittpunkt, zugleich als Beispiel für die zahlreichen Beziehungen zwischen den Schnittpunkten in  $K \cup D$ , sei

$$Z = l4' \cap 23' = (p, p^{-1}, p^{-1}) \quad (29)$$

erwähnt (Fig. 1). Eine perspektive Kollineation habe das Zentrum  $Z$ ; Kollineationsebene sei irgendeine Ebene durch 6 und 8. Durch die Kollineation lässt sich  $k_{243}(8126)$  in  $84'3'6$  überführen, daher  $k_2(18) \cap k_3(26) = (\lambda p^3, \lambda p, \lambda)$  (in Fig. 1 mit  $(23)_Z^{II}$  bezeichnet) in  $k_3(84') \cap k_4(63') = (34)^{II} = (-1, -p^{-2}, -p)$ , ebenso  $|23|_Z^{II}$  in  $|34|^{II}$ . Diese Punkte liegen auf zwei Kollineationsstrahlen, daher: Die Geraden  $(23)_Z^{II}(34)^{II}$  und  $|23|_Z^{II}|34|^{II}$  in  $\varepsilon_0^{II}$  gehen durch  $Z$ .

## 5. Das unsymmetrische dual-archimedische Polyeder $\bar{\Pi}$ von $\Gamma$

5.1. *Gestalt von  $\bar{\Pi}$ .* Die Polarität an einer Kugel  $\kappa$  um  $M$  führt  $\Pi$  in ein Polyeder  $\bar{\Pi}$  über. In Figur 2 ist  $\bar{\Pi}$  in derselben Art dargestellt wie  $\Pi$  in Figur 1; beide Figuren besitzen dieselben Symmetrieeigenschaften. Als Kugel  $\kappa$  ist in Figur 2 die Kugel gewählt, die die Dreiecksebenen von  $\Pi$  berührt; nach (15) ist ihr Radius  $\rho_3 = p^{-1}/\sqrt{3}$ . In der Polarität entspricht dann

- jedem Dreieck  $\Delta_2$  oder  $\Delta_3$  von  $\Pi$  sein Mittelpunkt; dessen Koordinaten folgen aus (2), (9), (10). In Figur 2 erscheint er als Schwerpunkt des Bildes von  $\Delta_2$  oder  $\Delta_3$  in Figur 1. Von jedem dieser Punkte gehen drei Kanten von  $\bar{\Pi}$  aus;
- einem Quadrat  $\Delta_4$  von  $\Pi$ , in der Ebene  $x_m = \pm 1$  liegend, der Punkt mit  $x_m = \pm \rho_3^2/\rho_4 = \pm p^{-2}/3$  auf der  $x_m$ -Achse. Diese 8 Ecken von  $\bar{\Pi}$  sind in Figur 2 durch Ringe hervorgehoben. Von ihnen gehen je 4 Kanten von  $\bar{\Pi}$  aus.

$\bar{\Pi}$  ist von 24 kongruenten Fünfecken begrenzt; jedes besitzt eine Symmetrieachse. Eines ist in Figur 2 mit III III IV V bezeichnet. Man findet

$$\begin{aligned} \overline{\text{I, II}} = \overline{\text{I, V}} &= (\sqrt{p} + \sqrt{p^{-1}})/3, & \overline{\text{II, III}} = \overline{\text{III, IV}} = \overline{\text{IV, V}} &= 2\sqrt{p}/3, \\ \overline{\text{II, V}} &= 2\sqrt{p^{-1}}/3. \end{aligned} \quad (30)$$

5.2. *Inzidenzen im Kantensystem von  $\bar{\Pi}$ .* Die Polarität an  $\kappa$  führt die Verbindungsebene  $[\mu\nu]$  komplanarer Kanten von  $\Pi$  in den Schnittpunkt der entsprechenden Kanten  $\bar{k}_\mu, \bar{k}_\nu$  von  $\bar{\Pi}$  über; dieser sei mit  $\langle\mu\nu\rangle$  bezeichnet. In Figur 2 tragen  $\bar{k}_\mu$  und  $\bar{k}_\nu$  einen gegen  $\langle\mu\nu\rangle$  gerichteten Pfeil. Aus der Ebene eines ebenen Vierkantenzuges von  $\Pi$  und aus der Ebene  $[34]^I$ , gegeben durch (21) und (22), erhält man (beim gewählten Radius von  $\kappa$ )

$$\langle 23 \rangle^I = \langle 33 \rangle = \langle 24 \rangle = \left( \frac{p^{-1}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{p^{-2}}{3} \right), \quad \langle 34 \rangle^I = \left( -\frac{p^{-2}}{3}, -\frac{p^{-1}}{3}, \frac{p^{-4}}{3} \right). \quad (31)$$

Aus den Ebenen  $[23]^{II}$  und  $[34]^{II}$ , gegeben durch (23) und (24), folgt

$$\langle 23 \rangle^{II} = \left( \frac{p^{-1}}{3}, \frac{p^{-3}}{3}, \frac{p^{-3}}{3} \right), \quad \langle 34 \rangle^{II} = \left( -\frac{p}{3}, -\frac{p^{-1}}{3}, \frac{p^{-3}}{3} \right). \quad (32)$$

In Figur 2 sind jene Punkte  $\langle\mu\nu\rangle$  bezeichnet, die zu den in Figur 1 mit  $(\mu\nu)$  bezeichneten Punkten gehören.

Die Punkte  $\langle 23 \rangle^I = \dots$  bilden den abgestumpften Würfel, der aus  $\Pi$  durch die Streckung aus  $M$  mit dem Faktor  $p^{-2}/3$  hervorgeht. Wie in 3.3 findet man: *Die Punkte  $\langle 23 \rangle^{II}$  bilden ein symmetrisches Polyeder, hingegen  $\langle 34 \rangle^I$  und  $\langle 34 \rangle^{II}$  je ein unsymmetrisches Polyeder von  $\Gamma$ .* Die Koordinaten der Ecken verhalten sich, abgesehen von Reihenfolge und Vorzeichen, bei  $\Pi \langle 23 \rangle^I$  wie  $1:p:p^2$ , bei  $\Pi \langle 34 \rangle^I$  wie  $1:p^2:p^3$ , bei  $\Pi \langle 23 \rangle^{II}$  wie  $1:1:p^2$ , bei  $\Pi \langle 34 \rangle^{II}$  wie  $1:p^2:p^4$ . Daraus folgt übrigens:  $\Pi \langle 34 \rangle^{II}$  und  $\Pi \langle 34 \rangle^I$  sind ähnliche Polyeder. Fritz Hohenberg, Graz

## Inequalities involving convex sequences

To Ernst Trost on his 70th anniversary

### 1. Introduction

As an extension of the familiar estimate

$$a + \frac{1}{a} > 2 \quad (a > 0, a \neq 1),$$