Kann man ohne Rechner entscheiden, ob e oder e größer ist

Autor(en): **Hohler, Peter / Gebauer, Peter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 5

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-35553

VERDANKUNG

Für wertvolle Hinweise möchte ich Herrn Prof. Dr. M. Jeger herzlich danken.

P. Baptist, Bayreuth

LITERATURVERZEICHNIS

1 E.L. Berlekamp: Algebraic Coding Theory. McGraw-Hill, New York 1968.
2 A. Engel: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt. Klett, Stuttgart 1977.
3 M. Jeger: Zur Behandlung des euklidischen Algorithmus bei Polynomen mit einem programmierbaren Taschenrechner. El. Math. *35*, 25–42 (1980).
4 H. Lüneburg: Vorlesungen über Zahlentheorie. Birkhäuser, Basel 1979.

Kann man ohne Rechner entscheiden, ob e^π oder π^e grösser ist?

In [1] findet sich dazu die folgende elegante Lösung: In der Ungleichung $e^q > q+1$ für $q \neq 0$ setzt man $q = (\pi/e) - 1$ und erhält

$$e^{\frac{\pi}{e}-1} > \frac{\pi}{e}.$$

Daraus folgt $e^{\pi/e} > \pi$ und daraus

$$e^\pi > \pi^e. \tag{1}$$

Geht man diese Herleitung nochmals durch, so erkennt man, dass dabei die Zahl π insofern keine wesentliche Rolle spielt, als alle Ungleichungen gültig bleiben, wenn man an Stelle von π irgendeine positive Zahl $\neq e$ einsetzt.

Man schliesst daraus:
Genau die Zahl $a = e$ hat die Eigenschaft

$$\bigwedge_{x>0} a^x \geq x^a. \tag{2}$$

Dass *nur* die Zahl e diese Eigenschaft hat, folgt aus der Tatsache, dass die Gerade $y = x+1$ nur für $a = e$ Tangente an die Kurve $y = a^x$ ist; für jede Basis $a \neq e$ gibt es demnach ein q mit $|q| < 1$, so dass $a^q < q+1$. Für $x = a(q+1)$ gilt dann

$$a^{\frac{x}{a}-1} < \left(\frac{x}{a} - 1\right) + 1 = \frac{x}{a}$$

und daraus wie in (1): $a^x < x^a$.
Damit ist (2) bewiesen.
Einen anderen Zugang zum Satz (2) erhält man, wenn man die Ungleichung $a^x \geq x^a$ logarithmiert. Man erhält dann die äquivalente Ungleichung $x \cdot \ln a \geq a \cdot \ln x$ und daraus

$$\frac{\ln a}{a} \geq \frac{\ln x}{x}.$$

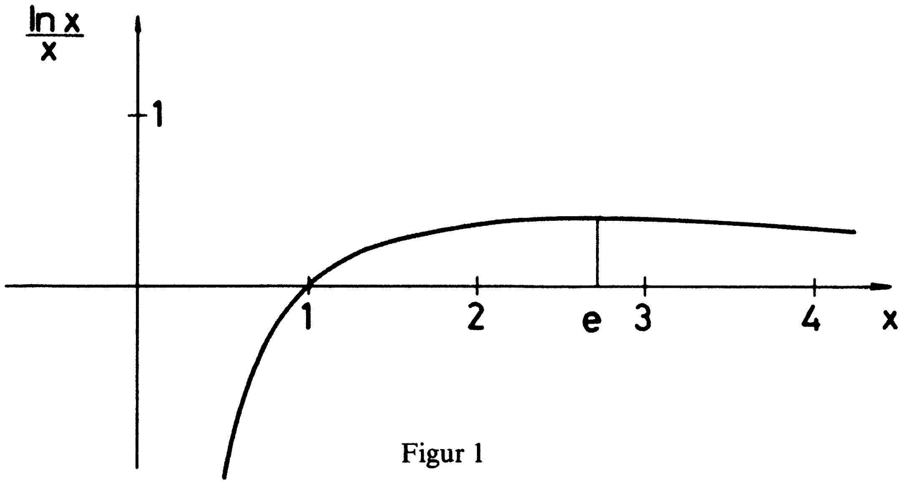
Die gesuchte Zahl a ist also gleich dem Argument x der Funktion $f(x)=\ln x/x$, das den maximalen Funktionswert liefert. Durch Ableiten von $f(x)$ findet man sofort $a=x_{\max}=e$.

Auf die gleiche Art lässt sich auch die Gleichung $y^x=x^y$ diskutieren: Diese Gleichung ist äquivalent zur Gleichung

$$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln y}{y}.$$

Da die Lösungen $x=y$ trivial sind und die Gleichung in x und y symmetrisch ist, kann man ohne Verlust an Allgemeinheit annehmen (siehe Fig. 1):

$$1<x<y.$$



Figur 1

Ist (x,y), $1<x<y$, eine Lösung der Gleichung $x^y=y^x$, so setzen wir $y=x+\delta$ und erhalten

$$x^{x+\delta}=(x+\delta)^x \Leftrightarrow x^\delta=\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^x \Leftrightarrow x=\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\frac{x}{\delta}}.$$

Aus der Figur 1 entnimmt man, dass δ/x jeden reellen Wert $r>0$ annehmen kann. Man erhält somit eine Parameterdarstellung der Lösungspaare:

$$x=(1+r)^{\frac{1}{r}}$$

$$y=x+\delta=x\left(1+\frac{\delta}{x}\right)=(1+r)^{\frac{1}{r}}(1+r)=(1+r)^{\frac{1}{r}+1}.$$

Die Lösungen der Gleichung $y^x=x^y$ mit $x<y$ lassen sich darstellen in der Form

$$(x,y)=\left((1+r)^{\frac{1}{r}},(1+r)^{\frac{1}{r}+1}\right), \qquad r>0. \tag{3}$$

Es ergeben sich *rationale Lösungen*, wenn man für r Stammbrüche $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, einsetzt[1]). Man erhält dann

$$(x,y)=\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right). \tag{4}$$

So liefert z. B. $n=2$:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}}=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}}.$$

Wir beweisen nun noch, dass die in (4) aufgeführten Lösungen die einzigen rationalen Paare sind:
Zunächst: Wäre r irrational und $(1+r)^{1/r}$ rational, dann wäre

$$(1+r)^{\frac{1}{r}+1}=(1+r)^{\frac{1}{r}}(1+r)$$

irrational, denn das Produkt aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets irrational.
Wir setzen also $r=m/n$ und zeigen:

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \tag{5}$$

m, n natürlich, teilerfremd, $m>1$, ist irrational.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Implikation

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \text{ rational } \Rightarrow \left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ rational.}$$

Da die zu m teilerfremden Zahlen $<m$ bezüglich der Multiplikation modulo m eine Gruppe bilden, ist die Kongruenz $z \cdot n \equiv 1 \pmod{m}$ bei unseren Voraussetzungen lösbar. Ist $zn=\lambda m+1$, so gilt:

Ist $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}$ rational, so ist auch

$$\left[\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}}\right]^z=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{nz}{m}}=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{\lambda m+1}{m}}=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$$

1) Die Lösungen in algebraischen Zahlen finden sich in [2].

rational und damit $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$ rational.

Der Beweis der Aussage (5) ist also erbracht, wenn gezeigt ist, dass

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{\frac{m+n}{n}}$$

irrational ist.
Die m-te Wurzel aus dem Quotienten der beiden teilerfremden Zahlen $m+n$ und n kann aber nur dann rational sein, wenn sowohl $m+n$ als auch n eine m-te Potenz ist. Ist $n=w^m$, so gilt für die nächsthöhere m-te Potenz nach der Ungleichung von Bernoulli

$$(w+1)^m > w^m + mw \geq n+m.$$

$m+n$ kann also nicht gleichzeitig mit n eine m-te Potenz sein, womit (5) bewiesen ist.
Die in (4) aufgeführten Lösungspaare sind also die einzigen rationalen.
Da $n+1$ und n teilerfremd sind, erhält man schliesslich für $n=1$ die *einzige ganzzahlige Lösung* (2/4).

Peter Hohler, Olten
Peter Gebauer, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 R. Honsberger: Mathematical Morsels. Dolciani Math. Expos., USA 1978 (Problem 26).
2 D. Sato: Algebraic Solution of $x^y=y^x$. Proc. Am. Math. Soc. *31* (1972), 316.

Eine Bemerkung zur Wohlordnungseigenschaft der natürlichen Zahlen

In der didaktischen Literatur findet man viele Axiomatisierungen der natürlichen Zahlen, die von den Peano-Axiomen abgeleitet sind oder die die Wohlordnungseigenschaft benutzen. Wir wollen hier ein Axiomensystem vorstellen, das im entscheidenden - zur Wohlordnung äquivalenten - Axiom von Mächtigkeitsbetrachtungen ausgeht und das dabei ein besonders einfaches Prinzip benutzt:

Das Dirichletsche Schubfáchprinzip.
Wenn m Gegenstände auf n Schubfächer verteilt werden und dabei $m>n$ ist, dann enthält ein Schubfach mehr als einen Gegenstand.
Bauhoff zeigt in [1], dass das Schubfachprinzip als Beweisprinzip sinnvoll verwendet werden kann. Engel und Sewerin stellen in [3] eine Fülle von Aufgaben und Problemen vor, die mittels des Schubfachprinzips zu lösen sind. Pinker schliesslich