Eine Bemerkung zur Wohlordnungseigenschaft der natürlichen Zahlen

Autor(en): **Stein, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 5

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-35554

rational und damit $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$ rational.

Der Beweis der Aussage (5) ist also erbracht, wenn gezeigt ist, dass

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{\frac{m+n}{n}}$$

irrational ist.
Die m-te Wurzel aus dem Quotienten der beiden teilerfremden Zahlen $m+n$ und n kann aber nur dann rational sein, wenn sowohl $m+n$ als auch n eine m-te Potenz ist. Ist $n=w^m$, so gilt für die nächsthöhere m-te Potenz nach der Ungleichung von Bernoulli

$$(w+1)^m > w^m + mw \geq n+m.$$

$m+n$ kann also nicht gleichzeitig mit n eine m-te Potenz sein, womit (5) bewiesen ist.
Die in (4) aufgeführten Lösungspaare sind also die einzigen rationalen.
Da $n+1$ und n teilerfremd sind, erhält man schliesslich für $n=1$ die *einzige ganzzahlige Lösung* (2/4).

Peter Hohler, Olten
Peter Gebauer, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 R. Honsberger: Mathematical Morsels. Dolciani Math. Expos., USA 1978 (Problem 26).
2 D. Sato: Algebraic Solution of $x^y=y^x$. Proc. Am. Math. Soc. *31* (1972), 316.

Eine Bemerkung zur Wohlordnungseigenschaft der natürlichen Zahlen

In der didaktischen Literatur findet man viele Axiomatisierungen der natürlichen Zahlen, die von den Peano-Axiomen abgeleitet sind oder die die Wohlordnungseigenschaft benutzen. Wir wollen hier ein Axiomensystem vorstellen, das im entscheidenden - zur Wohlordnung äquivalenten - Axiom von Mächtigkeitsbetrachtungen ausgeht und das dabei ein besonders einfaches Prinzip benutzt:

Das Dirichletsche Schubfächprinzip.

Wenn m Gegenstände auf n Schubfächer verteilt werden und dabei $m>n$ ist, dann enthält ein Schubfach mehr als einen Gegenstand.
Bauhoff zeigt in [1], dass das Schubfachprinzip als Beweisprinzip sinnvoll verwendet werden kann. Engel und Sewerin stellen in [3] eine Fülle von Aufgaben und Problemen vor, die mittels des Schubfachprinzips zu lösen sind. Pinker schliesslich

vergleicht in [5] dieses Prinzip mit der vollständigen Induktion und der Wohlordnungseigenschaft bezüglich seiner intuitiven Akzeptierbarkeit.
Wir wollen hier zeigen, dass in einem geeigneten Axiomensystem die Wohlordnungseigenschaft der natürlichen Zahlen durch das Dirichletsche Schubfachprinzip - bzw. eine äquivalente Formulierung - ersetzt werden kann. (Pinker [4] zeigt diese Äquivalenz ebenfalls. Beim Nachweis der entscheidenden Implikation - Schubfachprinzip $\Rightarrow$ Wohlordnung - benutzt er jedoch in versteckter Weise ein der vollständigen Induktion gleichwertiges Prinzip. Auch fehlt ein axiomatischer Rahmen, innerhalb dessen ein exakter Beweis geführt werden kann.)
Für eine Axiomatisierung der natürlichen Zahlen mittels der Wohlordnungseigenschaft wählen wir folgende Axiome:

W1: Auf $\mathbf{N}$ gibt es eine Relation $<$ mit den folgenden Eigenschaften:
a) $<$ ist transitiv,
b) $n<m \Rightarrow n \neq m$,
c) $\bigwedge_{n,m \in \mathbf{N}} (n<m \vee n=m \vee m<n)$.
W2: $\mathbf{N}$ hat bezüglich $<$ kein grösstes Element.
W3: Für jedes $m \in \mathbf{N}$ gilt: ist $M=\{x \mid x<m, x \in \mathbf{N}\} \neq \emptyset$, dann enthält M ein grösstes Element. (Wir nennen es den «unmittelbaren Vorgänger von m» und bezeichnen es als $m-1$.)
W4: Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbf{N}$ hat bezüglich $<$ ein kleinstes Element (d.h., $\mathbf{N}$ ist bezüglich $<$ wohlgeordnet).

In dieser Axiomatisierung soll die Wohlordnungseigenschaft durch das Schubfachprinzip ersetzt werden. Dazu müssen wir zunächst eine geeignete Formulierung wählen:
Als «Menge von k Gegenständen» wollen wir die natürlichen Zahlen von 0 bis $k-1$ verstehen; wir definieren also:

$$S_m := \{x \mid x<m, x \in \mathbf{N}| \, .$$

Das Schubfachprinzip besagt jetzt:
Wenn $m>n$ ist, dann ist S_n gleichmächtig einer echten Teilmenge von S_m.

Der einfacheren Formulierung wegen wählen wir die Kontraposition dieses Prinzips als Präzisierung des Schubfachprinzips:

$$D: S_m \sim S_n \rightarrow m=n \, .$$

Wir haben damit eine schwache Form des bei Bigalke [2] angegebenen Axioms H.3 erhalten, das in unserer Terminologie lauten würde: «S_n ist eine endliche Menge».
Der Beweis der Äquivalenz von W4 und D soll nun geführt werden, ohne dass wir wie Bigalke andere äquivalente Axiomatisierungen von $\mathbf{N}$ «dazwischenschalten».

Satz. *Die Axiomensysteme W1–W4 und W1–W3, D sind äquivalent.*

Beweis:
1. *Wir zeigen, dass aus der Wohlordnungseigenschaft das Schubfachprinzip folgt*:
Annahme: Das Schubfachprinzip D gilt nicht. Dann gibt es $n,m \in \mathbf{N}$ mit $S_n \sim S_m$, $n < m$. Sei n_0 das kleinste $n \in \mathbf{N}$, zu dem es ein solches m gibt.
n_0 ist ungleich 0, denn $S_0 = \emptyset \nsim S_m \neq \emptyset$.
Ferner gilt auch $n_0 > 1$ (wobei 1 die kleinste Zahl > 0 ist), denn aus $m > n_0 = 1$ folgt:

$$\{0,1\} \subset S_m \nsim S_1 = \{0\}.$$

Sei nun $S_{n_0} \sim S_m$ mit $m > n_0$.
f: $S_{n_0} \rightarrow S_m$ sei eine bijektive Funktion, die wir o. B. d. A. so wählen können, dass $f(n_0 - 1) = m - 1$ ($n_0 - 1$ und $m - 1$ sind definiert, da $0 < n_0$).
Die Funktion g: $S_{n_0-1} \rightarrow S_{m-1}$ sei definiert als Einschränkung von f auf S_{n_0-1}. g ist wohldefiniert, da $S_{m-1} \neq \emptyset \neq S_{n_0-1}$ ($n_0 \neq 1$), und nach Konstruktion bijektiv.
Damit ist $S_{n_0-1} \sim S_{m-1}$, $n_0 - 1 < n_0, n_0 - 1 < m - 1$, und wir erhalten einen Widerspruch zur Minimalität von n_0.

2. *Wir zeigen, dass aus dem Schubfachprinzip die Wohlordnungseigenschaft folgt*:
Annahme: Es gibt ein S mit $\emptyset \neq S \subset \mathbf{N}$, das kein kleinstes Element besitzt. Sei $n \in S, m := n - 1$. Zu diesem n,m betrachten wir S_n, S_m und definieren wie folgt eine Funktion f: $S_n \rightarrow S_m$:

$$f(x) := \begin{cases} \xi, & \xi \text{ ist die grösste Zahl in } S_m\text{, die kleiner als } x \text{ ist, wenn} \\ & S \text{ ein Element enthält, das kleiner als } x \text{ ist} \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Beweis ist abgeschlossen, wenn wir gezeigt haben, dass f bijektiv ist, denn dann ist $S_n \sim S_m$, woraus mit dem Axiom D folgt, dass $n = m$ gilt, was ein Widerspruch zur Definition von m ist.

I. *f ist surjektiv*
Sei $z \in S_m$.
1. Fall. S enthält ein Element, das kleiner als $z + 1$ ist ($z + 1$ ist die kleinste natürliche Zahl, die grösser als z ist).
Dann ist $z + 1 \in S_n, f(z + 1) = z$.
2. Fall. S enthält kein Element kleiner als $z + 1$. Dann ist $f(z) = z$.
Damit ist die Surjektivität von f nachgewiesen.

II. *f ist injektiv*
Sei $x \neq y$; $x,y \in S_n$. O.B.d.A. können wir annehmen: $x < y$. Wir wollen zeigen: $f(x) \neq f(y)$.
Wir müssen folgende Fälle unterscheiden:
1. Fall. Es gibt ein $p \in S$, das kleiner als x ist.
Dann ist $f(x) < f(y)$, woraus $f(x) \neq f(y)$ folgt.

2. Fall. Es gibt kein $p \in S$, das kleiner als x ist.
Dann ist $f(x)=x$.
Wenn S nun auch keine kleinere Zahl als y enthält, ist $f(y)=y \neq x=f(x)$.
Wenn es ein $p \in S$ mit $p<y$ gibt, ist $x<p$.
(Aus $p \leqslant x$ würde aus der Annahme über S folgen, dass es ein $r \in S$ mit $r<p \leqslant x$ gibt, im Widerspruch zur obigen Annahme.)
Aus $x<p$ folgt aber $f(x)=x<p \leqslant f(y)$.
Damit ist die Injektivität von f nachgewiesen.

M. Stein, Münster

LITERATURVERZEICHNIS

1 E.P. Bauhoff: Schlüsse nach dem Schubfachprinzip im Mathematikunterricht. In: R. Bodendiek (Hrsg.): Zwischenbilanz. Situation und Tendenz des Mathematikunterrichts heute. Herder-Verlag, Freiburg 1978.
2 H.-G. Bigalke: Zur Struktur der Menge der natürlichen Zahlen. MNU, Bd. 16, S.97-101 (1963).
3 A. Engel und H. Sewerin: Das Schubfachprinzip. MU, 25.Jg., Heft 1, S.23-37 (1979).
4 A. Pinker: The Equivalence of the Well-Ordering Principle and Dirichlet's Box Principle. The Two Year College Mathematics Journal, Bd. 5, Nr. 1, S.76-77 (1974).
5 A. Pinker: Induction and Well Ordering. School Science and Mathematics, Bd. 76, S.207-214 (1976).
6 P. Sorger und M. Stein: Logik in der Oberstufe. Erscheint in ZDM.

Aufgaben

Aufgabe 847. Die beiden Zahlenfolgen $(a_n), (b_n)$ mit

$$a_n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{k+1}\right]} \binom{n-kj}{j} s^j$$

und

$$b_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+kj}{k+kj} s^j$$

($n=0,1,2,\ldots$; k eine feste natürliche, s eine feste reelle Zahl) sind durch einfache Rekursionsformeln zu charakterisieren.
(Für $s=1$ sind a_n, b_n Transversalsummen, für $s=-1$ alternierende Transversalsummen im Pascal-Dreieck.)

J. Binz, Bolligen

Lösung: Wir definieren die Folge $(A_n(X))_{n=0,1,\ldots}$ von Polynomen in einer Unbestimmten X durch

$$A_n(X):=1 \quad \text{für} \quad 0 \leqslant n \leqslant k, \qquad A_{n+1}(X):=A_n(X)+XA_{n-k}(X) \quad \text{für} \quad n \geqslant k \quad (1)$$