Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 5

PDF erstellt am: **30.06.2024**

2. Fall. Es gibt kein $p \in S$, das kleiner als x ist.
Dann ist $f(x) = x$.
Wenn S nun auch keine kleinere Zahl als y enthält, ist $f(y) = y \neq x = f(x)$.
Wenn es ein $p \in S$ mit $p < y$ gibt, ist $x < p$.
(Aus $p \leqslant x$ würde aus der Annahme über S folgen, dass es ein $r \in S$ mit $r < p \leqslant x$ gibt, im Widerspruch zur obigen Annahme.)
Aus $x < p$ folgt aber $f(x) = x < p \leqslant f(y)$.
Damit ist die Injektivität von f nachgewiesen.

M. Stein, Münster

LITERATURVERZEICHNIS

1 E.P. Bauhoff: Schlüsse nach dem Schubfachprinzip im Mathematikunterricht. In: R. Bodendiek (Hrsg.): Zwischenbilanz. Situation und Tendenz des Mathematikunterrichts heute. Herder-Verlag, Freiburg 1978.
2 H.-G. Bigalke: Zur Struktur der Menge der natürlichen Zahlen. MNU, Bd. 16, S.97-101 (1963).
3 A. Engel und H. Sewerin: Das Schubfachprinzip. MU, 25.Jg., Heft 1, S.23-37 (1979).
4 A. Pinker: The Equivalence of the Well-Ordering Principle and Dirichlet's Box Principle. The Two Year College Mathematics Journal, Bd. 5, Nr. 1, S.76-77 (1974).
5 A. Pinker: Induction and Well Ordering. School Science and Mathematics, Bd. 76, S.207-214 (1976).
6 P. Sorger und M. Stein: Logik in der Oberstufe. Erscheint in ZDM.

Aufgaben

Aufgabe 847. Die beiden Zahlenfolgen $(a_n), (b_n)$ mit

$$a_n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{k+1}\right]} \binom{n-kj}{j} s^j$$

und

$$b_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+kj}{k+kj} s^j$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$; k eine feste natürliche, s eine feste reelle Zahl) sind durch einfache Rekursionsformeln zu charakterisieren.
(Für $s = 1$ sind a_n, b_n Transversalsummen, für $s = -1$ alternierende Transversalsummen im Pascal-Dreieck.)

J. Binz, Bolligen

Lösung: Wir definieren die Folge $(A_n(X))_{n=0,1,\ldots}$ von Polynomen in einer Unbestimmten X durch

$$A_n(X) := 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqslant n \leqslant k, \qquad A_{n+1}(X) := A_n(X) + X A_{n-k}(X) \quad \text{für} \quad n \geqslant k \quad (1)$$

und behaupten

$$A_n(X)=\sum_{j\geqslant 0}\binom{n-kj}{j}X^j \quad \text{für alle} \quad n\geqslant 0. \tag{2}$$

Für $0\leqslant n\leqslant k$ ist dies nach (1) offenbar korrekt. Sei nun $n\geqslant k$ und (2) bereits für $0,\dots,n$ bewiesen: Die Rekursionsformel in (1) zeigt dann

$$A_{n+1}(X)=1+\sum_{j\geqslant 1}\left(\binom{n-kj}{j}+\binom{n-kj}{j-1}\right)X^j=1+\sum_{j\geqslant 1}\binom{n+1-kj}{j}X^j$$

nach einer wohlbekannten Formel für die Binomialkoeffizienten, was (2) für $n+1$ beweist. Wegen $\binom{n-kj}{j}=0$ für $j>n/(k+1)$ erhält man aus (1) sofort die Rekursionsformel

$$a_{n+1}=a_n+s\cdot a_{n-k}, \qquad n\geqslant k.$$

Für komplexe z mit $|z|<1$ und $t,u\in\mathbf{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}\sum_{v\geqslant 0}\binom{t+v}{t}z^v&=(1-z)^{-(t+1)}=(1-z)^u(1-z)^{-(t+u+1)}\\&=\left(\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\binom{u}{i}z^i\right)\left(\sum_{j\geqslant 0}\binom{t+u+j}{t+u}z^j\right)\\&=\sum_{v\geqslant 0}z^v\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\binom{u}{i}\binom{t+u+v-i}{t+u}.\end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz hat man daher

$$\binom{t+v}{t}=\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i\binom{u}{i}\binom{t+u+v-i}{t+u} \quad \text{für} \quad t,u,v\in\mathbf{N}_0; \tag{3}$$

hier ist zu beachten, dass i in der Summe eigentlich nur bis $\operatorname{Min}(u,v)$ läuft, aber für die restlichen i verschwindet mindestens einer der Binomialkoeffizienten rechts in (3).
Nun definieren wir die Folge $(B_n(X))_{n=0,1,\dots}$ gemäss

$$B_n(X):=\sum_{j\geqslant 0}\binom{n+kj}{j+kj}X^j \quad \text{für } 0\leqslant n\leqslant k \tag{4}$$

bzw.

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}B_{n+1-i}(X):=XB_n(X) \quad \text{für} \quad n\geqslant k. \tag{5}$$

Wir behaupten, dass (4) für alle n gilt. Sei $n \geqslant k$ und (4) für $0,\dots,n$ eingesehen: Nach (5) und (4) ist

$$B_{n+1}(X)=\sum_{j\geqslant 0}\binom{n+kj}{j+kj}X^{j+1}-\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}\sum_{j\geqslant 0}\binom{n+1-i+kj}{j+kj}X^j$$

$$=\sum_{j\geqslant 0}X^j\left(\binom{n-k+kj}{(k+1)(j-1)}-\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}\binom{n+1-i+kj}{(k+1)j}\right)$$

$$=\sum_{j\geqslant 0}\binom{n+1+kj}{(k+1)j}X^j,$$

was (4) für $n+1$ beweist; bei der letzten Gleichung wurde (3) mit $t=(k+1)(j-1)$, $u=k+1, v=n+1-j$ verwendet. Für die $b_n=B_n(s)$ gewinnt man aus (5) die Rekursionsformel

$$b_{n+1}=sb_n-\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}b_{n+1-i} \quad \text{für} \quad n\geqslant k,$$

während die Anfangswerte $b_0,\dots,b_k$ gemäss (4) festgelegt sind.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Bemerkung des Aufgabenstellers: Für $s=1$ zeigt $b_n=a_{(k+1)n}$, dass (b_n) Teilfolge von (a_n) ist. Ist zudem $k=1$, so illustriert die Rekursion die bekannte «Fibonacci-Eigenschaft» des Pascaldreiecks. Für $s=-1$ wird $b_n=(-1)^n a_{(k+1)n}$. Ist zudem $k=1$, so werden beide Folgen periodisch mit der Periode 6, wieder eine bekannte Eigenschaft des Pascaldreiecks.

Weitere Lösungen sandten H. Druckmüller (Innsbruck, A), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Mollens VS), Hj. Stocker (Wädenswil).

Aufgabe 848. Es seien a,b ganze, h,m,n natürliche Zahlen mit $m,n\geqslant 2$. Ferner sei

$$S=S(a,b;h;m,n):=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{n-1}\exp\frac{2\pi ih(ra+sb)}{mn}.$$

Man zeige, dass dann und nur dann $S=0$ gilt für $h=1,\dots,mn-1$, wenn eine der folgenden Bedingungen 1 und 2 erfüllt ist:

1. $(a,m)=1$ und $b=cm$ mit $(c,n)=1$,
2. $(b,n)=1$ und $a=dn$ mit $(d,m)=1$.

L. Kuipers, Mollens VS

Lösung: Die a,b,m,n mögen etwa die Bedingungen 1 erfüllen. Mit der üblichen Schreibweise $e(x)$ für $\exp(2\pi ix)$ ist dann

$$S=\left(\sum_{r=0}^{m-1}e\left(\frac{ah}{mn}r\right)\right)\left(\sum_{s=0}^{n-1}e\left(\frac{bh}{mn}s\right)\right)=\left(\sum_{r=0}^{m-1}e\left(\frac{ah}{mn}r\right)\right)\left(\sum_{s=0}^{n-1}e\left(\frac{ch}{n}s\right)\right). \tag{1}$$

Ist $n \nmid h$, so $n \nmid ch$ wegen $(c,n)=1$, und in diesem Fall verschwindet wegen der Summenformel für die endliche geometrische Reihe die zweite Summe rechts in (1). Ist $n \mid h$, etwa $h=qn$, so gilt $m \nmid aq$: Denn andernfalls müsste $m \mid q$ und damit $h \geqslant mn$ gelten, wegen $(a,m)=1$. Also ist $mn \nmid ah$ für dieses h, wohl aber $n \mid ah$, und so verschwindet in (1) jetzt die erste Summe rechts. Analog schliesst man, wenn die Bedingungen 2 vorausgesetzt sind.
Umgekehrt möge nun $S=0$ sein für $h=1,\ldots,mn-1$; wegen (1) ist dies für die soeben genannten h äquivalent zu

$$(mn \nmid ah \quad \text{und} \quad n \mid ah) \quad \text{oder} \quad (mn \nmid bh \quad \text{und} \quad m \mid bh). \tag{2}$$

$h=1$ zeigt (o.B.d.A.) $b=cm$. Wäre nun $(a,m)>1$, so nehmen wir $h=mn/(a,m)<mn$ und erhalten $bh=mnc \cdot m/(a,m)$, also $mn \mid bh$, und $ah=mn \cdot a/(a,m)$, was insgesamt (2) widerspricht; somit ist $(a,m)=1$. Nun nehmen wir an, es sei $(c,n)>1$: Ist $(c,n) \mid a$, so liefert $h=mn/(c,n)<mn$ einen Widerspruch zu (2); ist $(c,n) \nmid a$, so wählen wir $h=n/(c,n)$ und erhalten dafür einen Widerspruch zu (2). Somit sind die Bedingungen 1 nachgewiesen, und es ist klar, dass sich 2 ergibt, wenn wir für $h=1$ aus (2) $a=dn$ folgern.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten F. Emmerich (Marburg, BRD), P. Hajnal (Szeged, Ungarn), W. Janous (Innsbruck, A), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 849. Für natürliche n beweise man

$$\exp\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n \leqslant \exp\frac{n(n-1)(2n+5)}{12}.$$

M. Bencze, Brasov, Rumänien

Lösung mit Verschärfung: Die Eulersche Summenformel kann bekanntlich (vgl. etwa K. Knopp: Unendliche Reihen, Springer, 1964) für den Fall, dass $f^{(2k)}(x)$ und $f^{(2k+2)}(x)$ in $(x,x+n)$ von einerlei Zeichen sind, in der Form

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{n-1} f(x+\nu) = \int_x^{x+n} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\{f(x)-f(x+n)\} \\ + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \frac{B_{2\kappa}}{(2\kappa)!}\{f^{(2\kappa-1)}(x+n)-f^{(2\kappa-1)}(x)\} \\ + \theta_k \frac{B_{2k}}{(2k)!}\{f^{(2k-1)}(x+n)-f^{(2k-1)}(x)\}\end{aligned} \tag{1}$$

geschrieben werden. Dabei sind die $B_{2\kappa}$ die Bernoullischen Zahlen, $\theta_k \in [0,1]$. Unter Verwendung der Abkürzung

$$H_k(z,x) := \int_x^z f(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}f(z) + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \frac{B_{2\kappa}}{(2\kappa)!} f^{(2\kappa-1)}(z) + \theta_k \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(z) \tag{2}$$

lässt sich (1) kürzer schreiben als

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(x+\nu) = H_k(x+n,x) - H_k(x,x). \tag{3}$$

Da die linke Seite von k unabhängig ist, folgt unmittelbar

$$H_{k+1}(x+n,x) - H_k(x+n,x) = H_{k+1}(x,x) - H_k(x,x), \tag{4}$$

also nach (2) auch

$$\begin{aligned}&\frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x+n) + \theta_{k+1} \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} f^{(2k+1)}(x+n) - \theta_k \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x+n)\\ &= H_{k+1}(x,x) - H_k(x,x).\end{aligned} \tag{5}$$

Gilt nun $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(2k-1)}(x+n) = 0$ für alle $k \geqq k_0$, so folgt für diese k

$$H_{k+1}(x,x) = H_k(x,x), \tag{6}$$

d. h. $H_k(x.x)$ hat als Funktion von k die Periode 1, verhält sich also wie eine Konstante.

Unter diesen Voraussetzungen resultiert also, wenn man noch $f(x+n)$ auf beiden Seiten von (3) addiert, n durch $n-1$, x durch 1 und $-H_k(x,x)$ durch H ersetzt

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = \int_1^n f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2} f(n) + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \frac{B_{2\kappa}}{(2\kappa)!} f^{(2\kappa-1)}(n) + \theta_k \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + H. \tag{7}$$

Wir wenden nun die Formel (7) auf die Funktion $f(\xi) = \xi \ln \xi$ an und erhalten für $k=2$ mit den Abkürzungen

$$H^* := H + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}, \qquad g(n) := \frac{n^2}{2}\left(\ln n - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12}(6n+1)\ln n, \tag{8}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu \ln \nu = g(n) + H^* + \theta_2 \frac{1}{720 \cdot n^2}. \tag{9}$$

Damit ergibt sich folgende Ungleichung für die Abschätzung des in Frage stehenden Produktes

$$\exp\{g(n) + H^*\} \leqq 1^1 2^2 3^3 \ldots n^n \leqq \exp\left\{g(n) + H^* \frac{1}{720\, n^2}\right\}. \tag{10}$$

Zur numerischen Bestimmung von H^* formt man (7) unter Verwendung von (8) um in

$$H^* = \sum_{\nu=1}^{n} \nu \ln \nu - g(n) + \sum_{\kappa=1}^{k-1} \frac{B_{2\kappa}}{2\kappa(2\kappa-1)(2\kappa-2)n^{2\kappa-2}}$$

$$+\theta_k \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)(2k-2)n^{2k-2}}\,. \qquad (11)$$

Wegen $0 \leqq \theta_k \leqq 1$ erlaubt der letzte Term in (11) eine Abschätzung des Fehlers, den man bei der Berechnung von H^* unter Verwendung spezieller Zahlenwerte für n und k begeht. Da die Bernoulli-Zahlen für $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dem Betrage nach kleiner als 1 sind, empfiehlt es sich, für k einen dieser Werte, etwa $k=6$, zu wählen. Der Restterm erlaubt dann die Ermittlung des für die gewünschte Genauigkeit erforderlichen n-Wertes. So erhält man nach leichter Rechnung auf 9 Dezimalen exakt

$$H^* = 0.248754477\ldots, \qquad (12)$$

es gilt folglich für alle $n \geqq 1$

$$\exp\{g(n) + 0.2487544\} \leqq 1^1 2^2 3^3 \ldots n^n \leqq \exp\left\{g(n) + 0.2487545 + \frac{1}{720 n^2}\right\}. \qquad (13)$$

Nur für $n=1$ ist diese Ungleichung weniger scharf als die zu beweisende, für alle $n \geqq 2$ stellt sie eine wesentliche Verschärfung dar. Denn führt man die Hilfsfunktionen

$$h_l(n) = g(n) + 0.2487544 - \frac{n(n-1)}{2}$$

und

$$h_r(n) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{12} - g(n) - 0.2487545 - \frac{1}{720 n^2}$$

ein, so folgt wegen $h_l'(n) > 0$ und $h_r'(n) > 0$ für alle $n \geqq 2$ und $h_l(2) > 0, h_r(2) > 0$ unmittelbar die Behauptung.

G. Bach, Leinfelden, BRD

Dieselbe Verschärfung wie G. Bach erzielte J. Waldvogel (Zürich). Schwächer als jene, jedoch schärfer als die in der Aufgabenstellung angegebenen sind die Abschätzungen von P. Bundschuh (Köln, BRD), P. Hohler (Olten), W. Janous (Innsbruck, A), R. Razen (Leoben, A).
Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), A. Bager (Hjørring, DK), K. Bickel (Freiburg, BRD), H. Druckmüller (Innsbruck, A), Th. Egger (Appenzell), F. Emmerich (Marburg), J. Fehér (Pécs, Ungarn), Z. A. L. Geöcze (Viçosa, Brasilien), P. Hajnal (Szeged, Ungarn), E. Heinrich (Bochum, BRD), Kee-wai Lau (Hongkong), A. R. Kräuter (Leoben, A), L. Kuipers (Mollens VS), H. Kummer

(Burgdorf), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. D. Mascioni (Origlio), Chr. A. Meyer (Ittigen), Northern State College Problem Group (Aberdeen, USA), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1982* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 866. Für natürliche Zahlen a, b, c mit $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$ sei

$$S(a,b,c) := \sum_{k=1}^{c-1} (2k-1)[ka/c]^2 [kb/c]^2,$$

wobei [ ] die Ganzteilfunktion bezeichnet. Man zeige, dass

$$S(a,b,c)+S(b,c,a)+S(c,a,b)=(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2.$$

L. Kuipers, Mollens VS

Aufgabe 867. Man zeige, dass – mit der Zusatzvereinbarung $0^0 = 1$ – für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-1} [n+k(n-1)]k^{-2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

W. Janous, Innsbruck, A

Aufgabe 868. Gegeben sei ein Dreieck; ferner sei:
a eine der drei Dreiecksseiten, A' der Halbierungspunkt von a, k der Umkreis des Dreiecks, M der Mittelpunkt von k, l ein Berührkreis des Dreiecks (In- oder Ankreis), L der Mittelpunkt von l, k' der Feuerbachkreis, F der Mittelpunkt von k', P ein beliebiger Punkt von k'.

Man beweise: Ist P' der Schnittpunkt von k' mit einer Parallelen zu a durch P und P'' der Schnittpunkt von k' mit dem Lot auf ML aus P', dann ist der Schnittpunkt P''' von k' mit der Parallelen zu PA' durch P'' der Berührungspunkt von k' mit l.

E. Ungethüm, Wien, A

LITERATURVERZEICHNIS

E. Ungethüm: Poncelet'sche Dreiecksscharen. El. Math. *34,* 108 (1979).