

Normalrisse im Einschneideverfahren

Autor(en): **Kickinger, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 4

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37188>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 38

Nr. 4

Seiten 81–112

Basel, den 10. Juli 1983

Normalrisse im Einschneideverfahren

Herrn emer. O. Univ. Prof. Dr. J. Krames zum 85. Geburtstag gewidmet

Technische Objekte sind meist in gepaarten Normalrissen¹⁾ gegeben, die möglichst viele Objektmessungen unverzerrt zeigen, aber oft sehr unanschaulich sind.

Zur raschen Herstellung anschaulicher Parallelrisse aus gepaarten Normalrissen eignet sich besonders das Einschneideverfahren: Dabei werden etwa Grund- und Aufriss²⁾ in die Zeichenebene gelegt, zwei nichtparallele Geraden σ_1^p und σ_2^p der Zeichenebene gewählt und durch die Grundrisse bzw. Aufrisse der Objektpunkte zu σ_1^p bzw. σ_2^p parallele Einschneidegeraden gezogen. Schneidet man zusammengehörende Einschneidegeraden, so entsteht nach Eckhart [3, 4], abgesehen vom Maßstab, ein Parallelriss des in Grund- und Aufriss gegebenen Objekts³⁾; dabei ist σ_1^p der Parallelriss einer erstprojizierenden Ebene σ_1 und σ_2^p der Parallelriss einer zweitprojizierenden Ebene σ_2 , also $\sigma_1^p = \sigma_1'$ und $\sigma_2^p = \sigma_2''$.

Im folgenden soll die Frage beantwortet werden, wie ein Grundriss und ein Aufriss aufs Zeichenblatt gelegt⁴⁾ und welche Einschneidegeraden gewählt werden müssen, damit das Einschneideergebnis ein Normalriss zu einer vorgegebenen Blickrichtung ist. Damit erübrigt sich die graphisch oft unbefriedigende Einführung von zwei Seitenrissen.

1. Soll das Einschneideergebnis ein Normalriss sein, den wir fortan mit dem Abbildungszeiger " kennzeichnen, so ist der scheinbare Umriss u'' einer Kugelfläche ein Kreis; dieser berührt jene Einschneidegeraden, welche Tangenten an den ersten bzw. zweiten scheinbaren Umriss u_1' bzw. u_2'' der Kugelfläche sind⁵⁾ (Fig. 1). Da ein einem Kreis berührend umschriebenes Parallelogramm ein Rhombus ist, sind

1) Unter gepaarten Normalrissen versteht man zwei Normalrisse in zueinander normalen Bildebenen.

2) Alle Überlegungen, die wir anhand von Grund- und Aufriss anstellen, gelten analog für zwei beliebige gepaarte Normalrisse.

3) Diese Aussage stimmt nicht, wenn die Schnittpunkte aller zusammengehörender Einschneidegeraden kollinear sind. Dies trifft genau dann zu, wenn die Ebenen σ_1 und σ_2 parallel sind. Diese Ausartung wird im folgenden ausgeschlossen.

4) Bildebenen legen wir immer so in die Zeichenebene, dass die mitgenommenen Blickpfeile der Sehstrahlen vom Zeichner zur Zeichenebene weisen (vgl. [1] und [2]).

5) E. Stiefel gibt in [8], S. 138f., ein Verfahren an, mit dem unter Benützung eines axonometrischen Umrisspunktes auf u_1 ein Einschneideaufriß zu gegebenen Einschneidegeraden und gegebenem Einschneidegrundriss so ergänzt werden kann, dass ein normalaxonometrischer Riss entsteht. Wegen (2) funktioniert dieses Verfahren nicht uneingeschränkt (vgl. dazu auch [7], S. 209f.).

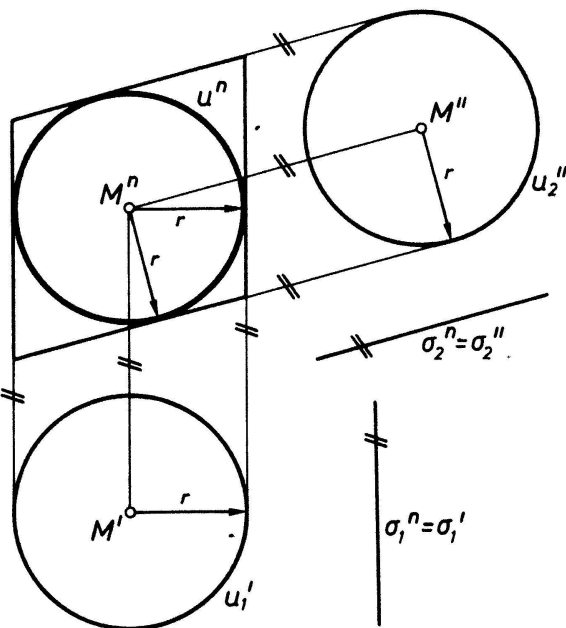
die Kreise u_1' , u_2'' und u'' gleich gross. Ein Normalriss kann daher nur aus gepaarten Normalrissen gleichen Maßstabs eingeschnitten werden, und der Maßstab des eingeschnittenen Normalrisses stimmt stets mit dem Maßstab der beiden Einschneiderisse überein.

Durch eine im eingeschnittenen Normalriss projizierende Gerade s gehen genau eine erstprojizierende Ebene σ_1 und eine zweitprojizierende Ebene σ_2 . Setzen wir s in keinem Einschneideriss als projizierend voraus, so gilt stets $\sigma_1' = s'$ und $\sigma_2'' = s''$, und wegen $\sigma_1'' = \sigma_1'$ bzw. $\sigma_2' = \sigma_2''$ verlaufen die Einschneidegeraden parallel s' bzw. s'' .

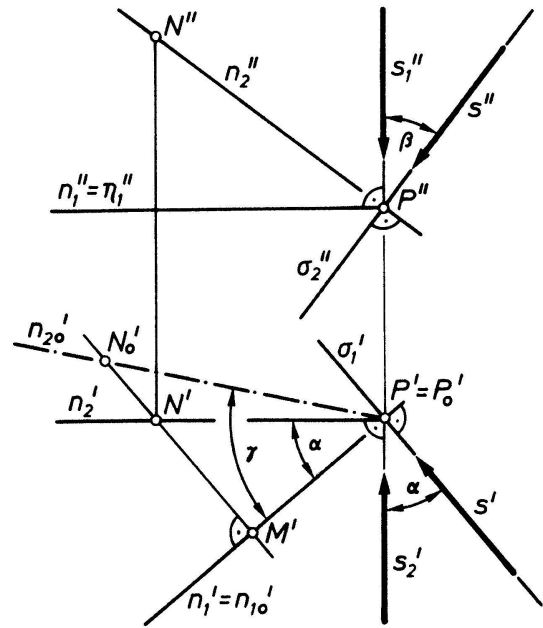
Ab nun sollen die im Einschneideergebnis projizierenden Geraden weder erst- noch zweitprojizierend sein⁶⁾.

2. Durch Vorgabe eines vertikalen, nach unten orientierten Sehstrahls⁷⁾ \bar{s}_1 bzw. eines horizontalen Sehstrahls \bar{s}_2 ist der Grundriss bzw. der Aufriss eines Objekts bestimmt. Ein von \bar{s}_1 und \bar{s}_2 verschiedener Sehstrahl \bar{s} legt einen weiteren Normalriss fest; wir wählen die Sehstrahlen \bar{s}_1 , \bar{s}_2 und \bar{s} durch denselben Punkt P .

Das Winkelmaß γ der Ebenen $\sigma_1 = s_1 s$ und $\sigma_2 = s_2 s$ ist gleich dem Mass des Winkels der Normalen⁹⁾ $n_1 \perp \sigma_1$ und $n_2 \perp \sigma_2$ durch den Punkt P . Zur Ermittlung der wahren Grösse von $\gamma = \sphericalangle n_1, n_2$ wurde in Figur 2 die Ebene $n_1 n_2$ um n_1 in die erste Haupt-



Figur 1



Figur 2

6) In den ausgeschlossenen Fällen ist das Resultat, abgesehen von Sichtbarkeitsfragen, ein Grundriss oder ein Aufriss.

7) Ist die Orientierung einer Geraden p wesentlich, so setzen wir \bar{p} .

8) Das Winkelmaß $\sphericalangle p, q$ zweier schneidender (nicht orientierter) Geraden p, q ist das Winkelmaß eines von den Geraden bestimmten, nicht stumpfen Winkels [2], S.9.

9) Die im wesentlichen auf E. Nyström zurückgehende Formel (1) wird in [6] mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie hergeleitet und unter Benützung eines Nomogramms ausgewertet. In [9] findet K. Strubecker die Formel (1) als Bedingung, dass im Einschneideergebnis der scheinbare Parallelumriss einer Kugel speziell ein Kreis ist.

ebene η_1 durch P gedreht; der Drehkreisbogen eines Punktes N von n_2 gehört dabei einer zu n_1 normalen Ebene an und hat seinen Mittelpunkt M auf n_1 . Im Grundriss können wir dann die wahre Länge l der Strecke (P, N) mit $l = \overline{PN} = \overline{P_o'N_o'}$ ablesen. Da die (nicht orientierten) Geraden s_1'', s'' dasselbe Winkelmaß β besitzen wie der Winkel von n_2 gegen die Grundrissebene, gilt $\overline{P'N'} = l \cos \beta$. Die (nicht orientierten) Geraden s_2', s' und n_1', n_2' bilden zwei Normalenwinkel; diese haben das gleiche Winkelmaß α , so dass aus dem rechtwinkligen Dreieck (P', M', N') folgt: $\overline{P'M'} = l \cos \alpha \cos \beta$. Durch das rechtwinklige Dreieck (P', M', N_o') ist $\overline{P'M'} = l \cos \gamma$ bedingt, was zusammenfassend

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta \quad (1)$$

ergibt¹⁰⁾.

Da das Winkelmaß der Risse zweier projizierender Ebenen genau bei Normalprojektion gleich dem Winkelmaß der Ebenen ist, gilt $\gamma = \sphericalangle \sigma_1^n, \sigma_2^n$; in der Einschneidesituation ist dann $\sigma_1^n = s'$ und $\sigma_2^n = s''$, also $\gamma = \sphericalangle s', s''$. Damit lautet (1)

$$\cos (s', s'') = \cos (s_2', s') \cos (s_1'', s''). \quad (2)$$

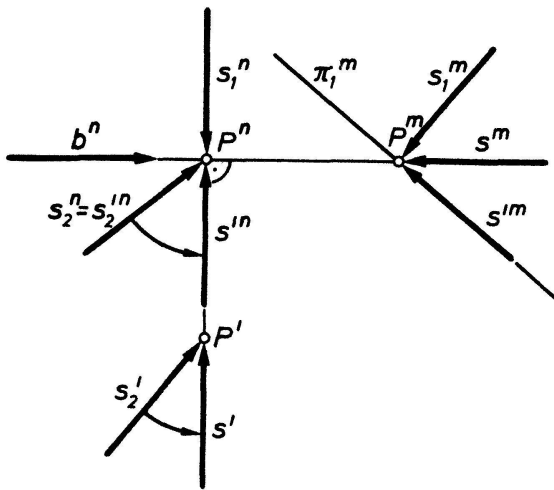
Anhand der Formel (2) kann aus dem Grundriss und dem Aufriss eines Sehstrahls \vec{s} das Winkelmaß der (nicht orientierten) Einschneidegeraden für den Normalriss zum Sehstrahl \vec{s} ermittelt werden; doch ist damit – auch wenn wir von Parallelverschiebungen absehen – die gegenseitige Lage der Einschneiderisse auf dem Zeichenblatt nicht hinreichend bestimmt, da die Orientierungen der Sehstrahlen noch nicht berücksichtigt sind.

3. Für die folgenden Überlegungen wählen wir den gemeinsamen Punkt P der Sehstrahlen \vec{s}_1, \vec{s}_2 und \vec{s} in der Grundrissebene π_1 , so dass der Sehstrahl \vec{s}_2 mit seinem Grundriss \vec{s}_2' zusammenfällt; für die Ergebnisse ist die Lage von P bezüglich π_1 bedeutungslos. Der zu konstruierende Normalriss zeigt eine Übersicht bzw. Untersicht, wenn die zum Punkt P hinorientierten Halbgeraden von \vec{s}_1 und \vec{s} demselben Halbraum bzw. verschiedenen Halbräumen bezüglich π_1 angehören.

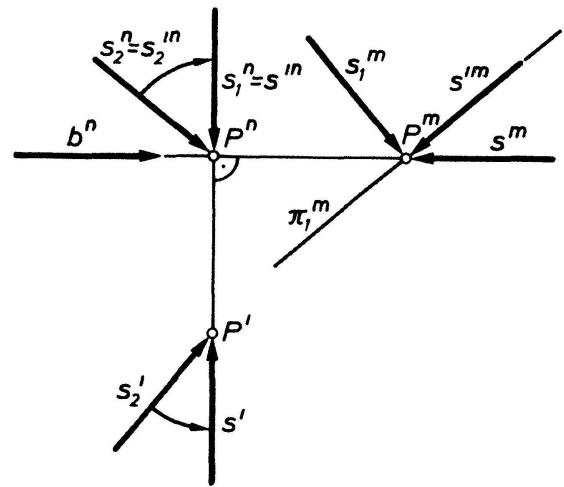
In der erstprojizierenden Ebene $\sigma_1 = s_1 s$ kann der Sehstrahl \vec{s}_1 durch P die zum Punkt P hinorientierten Halbgeraden von \vec{s} und \vec{s}' nicht trennen, und so sind – wie der in Figur 3 a bzw. Figur 3 b mit dem Abbildungszeiger m versehene Seitenriss zur Blickrichtung $b \perp s_1 s$ erkennen lässt – im Normalriss zur Blickrichtung s bei Übersicht bzw. Untersicht der Orientierungspfeil von \vec{s}_1^n und der von \vec{s}^n stets entgegengesetzt bzw. gleich gerichtet. Da weiters in der Einschneidesituation die zum Punkt P' hinorientierte Halbgerade von s_2' und die zum Punkt P^n hinorientierte Halbgerade von \vec{s}_2^n derselben Halbebene bezüglich der Einschneidegeraden $s' = P' P^n$ angehören und die kürzeste Drehung von \vec{s}_2' in \vec{s}' und die kürzeste Drehung von

10) Ist das Objekt mit einem Koordinatensystem verknüpft, so ist das beim Einschneiden entstehende Bild ein normalaxonomischer Riss (vgl. [5]).

$\vec{s}_2^n = \vec{s}_2^m$ in \vec{s}^m bei Obersicht bzw. Untersicht gemäss Figur 3 a bzw. Figur 3 b gleichsinnig bzw. gegensinnig sind, gilt: Die orientierten Geraden \vec{s}' und \vec{s}_1^n haben stets entgegengesetzte Richtung.



Figur 3a



Figur 3b

Analog sind beim Einschneiden \vec{s}'' und \vec{s}_2^n stets entgegengesetzt orientiert. Die gegensinnige Orientierung von \vec{s}'' und \vec{s}_2^n bedingt, dass die Einschneidegerade $s' = P'P^n$ die zum Punkt P^n hinorientierten Halbgeraden von \vec{s}'' und \vec{s}_2^n und somit auch die zum Punkt P' hinorientierte Halbgerade von \vec{s}_2' und die zum Punkt P^n hinorientierte Halbgerade von \vec{s}'' trennt. Dieser Sachverhalt lässt sich auch wie folgt ausdrücken: Ist die kürzeste Drehung, welche den orientierten Grundriss \vec{s}_2' von \vec{s}_2 in den orientierten Grundriss \vec{s}' von \vec{s} bringt, positiv bzw. negativ, so ist in der Einschneidesituation die kürzeste Drehung, welche \vec{s}' in den orientierten Aufriss \vec{s}'' von \vec{s} bringt, positiv bzw. negativ. Analoges gilt für die orientierten Geraden \vec{s}_1'', \vec{s}'' und \vec{s}' .

4. Verstehen wir unter $\sphericalangle \vec{p}, \vec{q}$ das Mass des nicht erhabenen Winkels der orientierten Geraden \vec{p}, \vec{q} , so gilt $|\cos(\vec{p}, \vec{q})| = \cos(p, q)$ und, je nachdem $0^\circ \leq \sphericalangle \vec{p}, \vec{q} \leq 90^\circ$ bzw. $90^\circ \leq \sphericalangle \vec{p}, \vec{q} \leq 180^\circ$ ist, $\sphericalangle \vec{p}, \vec{q} = \sphericalangle p, q$ bzw. $\sphericalangle \vec{p}, \vec{q} = 180^\circ - \sphericalangle p, q$.

Der Normalriss eines von zwei orientierten Geraden gebildeten spitzen bzw. stumpfen Winkels, von dem ein Schenkel normal zu den Hauptgeraden der (nicht projizierenden) Winkalebene steht, ist stets ein spitzer bzw. stumpfer Winkel. Demnach gilt mit $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}' < 90^\circ$ bzw. $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}' > 90^\circ$ wegen $\vec{s}_2' = \vec{s}_2$ immer auch $\sphericalangle \vec{s}_2^n, \vec{s}'' = \sphericalangle \vec{s}_2^m, \vec{s}'' < 90^\circ$ bzw. $\sphericalangle \vec{s}_2^n, \vec{s}'' = \sphericalangle \vec{s}_2^m, \vec{s}'' > 90^\circ$. Aufgrund der nach Abschnitt 3 entgegengesetzten Orientierung von \vec{s}'' und \vec{s}_1^n folgt daher aus $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}' < 90^\circ$ bzw. $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}' > 90^\circ$ bei Obersicht, bei der das Mass $\sphericalangle \vec{s}_1'', \vec{s}''$ stets kleiner als 90° ist, dann $\sphericalangle \vec{s}', \vec{s}'' = \sphericalangle \vec{s}_1^n, \vec{s}_2^n > 90^\circ$ bzw. $\sphericalangle \vec{s}', \vec{s}'' = \sphericalangle \vec{s}_1^n, \vec{s}_2^n < 90^\circ$, bei Untersicht, also bei $\sphericalangle \vec{s}_1'', \vec{s}'' > 90^\circ$, dagegen $\sphericalangle \vec{s}', \vec{s}'' < 90^\circ$ bzw. $\sphericalangle \vec{s}', \vec{s}'' > 90^\circ$. Somit kann die Bedingung (2) zu

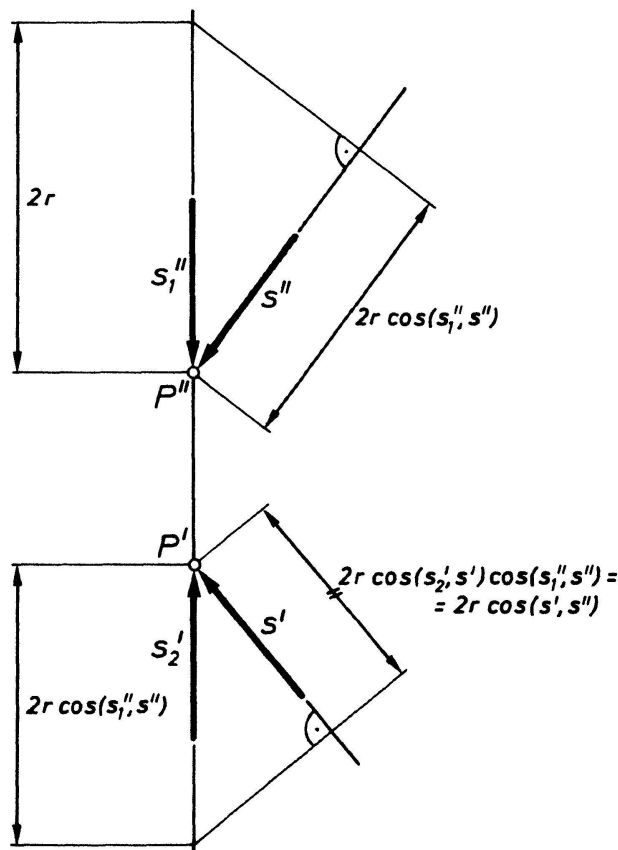
$$\cos(\vec{s}', \vec{s}'') = -\cos(\vec{s}_2', \vec{s}') \cos(\vec{s}_1'', \vec{s}'') \tag{3}$$

verschärft werden.

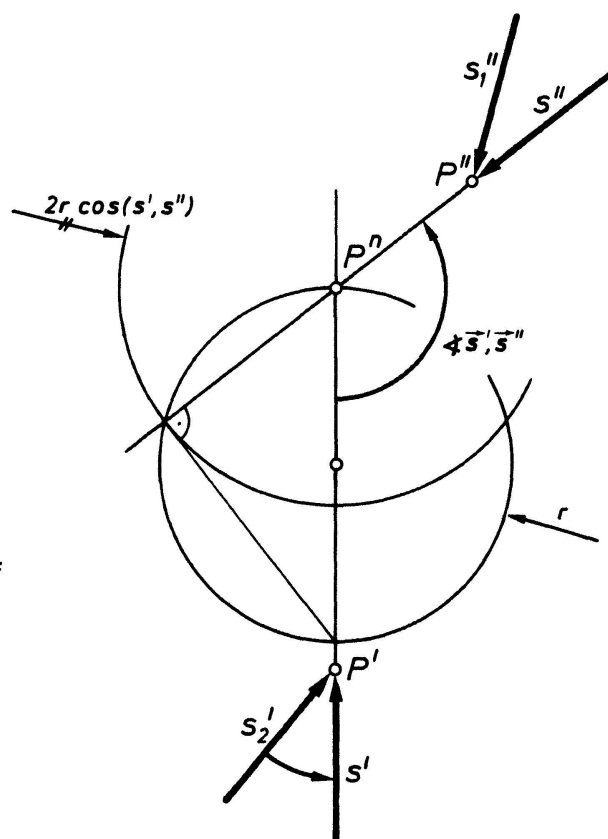
Für $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}' = 90^\circ$ bzw. $\sphericalangle \vec{s}_1'', \vec{s}'' = 90^\circ$ erhalten wir beim Einschneiden einen zum Einschneideaufriß bzw. Einschneidegrundriß gepaarten Normalriß, für $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}' = \sphericalangle \vec{s}_1'', \vec{s}'' = 90^\circ$ speziell einen Kreuzriß, so dass (3) unter Ausschluss der Werte 0° und 180° für $\sphericalangle \vec{s}_2', \vec{s}'$, $\sphericalangle \vec{s}_1'', \vec{s}''$ und $\sphericalangle \vec{s}', \vec{s}''$ uneingeschränkt gilt.

5. Die Anwendung unserer Überlegungen soll anhand der Figur 4 erläutert werden; dabei repräsentieren die Risse des Punktes P , durch den wir die Sehstrahlen \vec{s}_1, \vec{s}_2 und \vec{s} gewählt haben, Grund- und Aufriss eines Objekts¹⁰.

Wir legen den Einschneidegrundriß so aufs Zeichenblatt, dass s' zum linken Blattrand parallel und zum oberen Blattrand hin orientiert ist¹¹), und zeichnen zur graphischen Auswertung von (3) um einen beliebigen Punkt von s' einen Kreis von beliebigem Radius r : Wählen wir einen Schnittpunkt dieses Kreises mit s' als Normalriß P^n von P , so trifft die Einschneidegerade s'' durch P^n den Kreis in einem weiteren Punkt, der von P^n den Abstand $2r \cos(s', s'')$ hat; nach (2) gilt $2r \cos(s', s'') = 2r \cos(s_2', s') \cos(s_1'', s'')$, und dieser Abstand kann in den Angaberissen rasch ermittelt werden (vgl. Fig. 4 a). In Figur 4 ist die kürzeste Drehung, welche den



Figur 4a



Figur 4

11) Dadurch wird erreicht, dass im Einschneideergebnis die Risse von im Raum lotrechten, nach unten orientierten Geraden zum linken Blattrand parallel und zum unteren Blattrand hin orientiert sind.

orientierten Grundriss \vec{s}_2' von \vec{s}_2 in den orientierten Grundriss \vec{s}' des Sehstrahls \vec{s} bringt, positiv, daher geht in der Einschneidesituation der orientierte Aufriss \vec{s}'' aus \vec{s}' durch eine positive Drehung hervor; da weiters laut Angabe $\angle \vec{s}_2', \vec{s}' < 90^\circ$ und $\angle \vec{s}_1'', \vec{s}'' < 90^\circ$ gilt, ist das Mass $\angle \vec{s}', \vec{s}''$ des Drehwinkels grösser als 90° . Mit dem orientierten Aufriss \vec{s}'' von \vec{s} ist, bis auf Schiebungen parallel s'' , die Lage des Einschneideaufnisses auf dem Zeichenblatt bestimmt.

W. Kickingger, TU Wien

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Brauner und W. Kickingger: Baugeometrie I. Bauverlag, Wiesbaden, Berlin 1977.
- 2 H. Brauner: Darstellende Geometrie im Schulunterricht. Der Mathematikunterricht 27, Heft 3, 5-68 (1981).
- 3 L. Eckhart: Ein neues Schrägrissverfahren. Österreichs höhere Schule, Päd.-fachwiss. Beiblatt zum «Mittelschullehrer», 6. Jg., Oktober 1937.
- 4 L. Eckhart: Affine Abbildung und Axonometrie. S.-Ber. Akad. Wiss. Wien 146, 51-56 (1937).
- 5 W. Kickingger: Konstruktion von Normalrissen durch Einschneiden. Der Mathematikunterricht 28, Heft 2 (1982).
- 6 E.J. Nyström: Zur praktischen Axonometrie. Soc. scient. Fenn., Commentationes Physico-Mathem. XI 11, 1-25 (1942).
- 7 F. Reutter: Darstellende Geometrie, Bd. I. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1961.
- 8 E. Stiefel: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie. Verlag Birkhäuser, Basel 1947.
- 9 K. Strubecker: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, 2. Aufl. Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1967.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/040081-06\$1.50 + 0.20/0

On the successive remainders of the exponential series

In [3], Gautschi proved some results on the successive remainders of the exponential series and he made two conjectures.

The aim of this note is to complete Gautschi's results and to prove his second conjecture.

Let us recall that a sequence (a_n) is called totally monotone if, $\forall n, k \geq 0$

$$(-1)^k \Delta^k a_n \geq 0$$

where Δ is the forward difference operator: $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

A characterization of totally monotone sequences is due to Markov who showed that a necessary and sufficient condition for (a_n) to be totally monotone is that

$$a_n = \int_0^1 t^n dg(t) \quad n=0, 1, \dots$$

where g is bounded and non decreasing in $[0, 1]$. We shall write $(a_n) \in TM$.