

Zerlegung von regulären $2n$ -Ecken

Autor(en): **Pfeiffer, H. / Romer, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37200>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

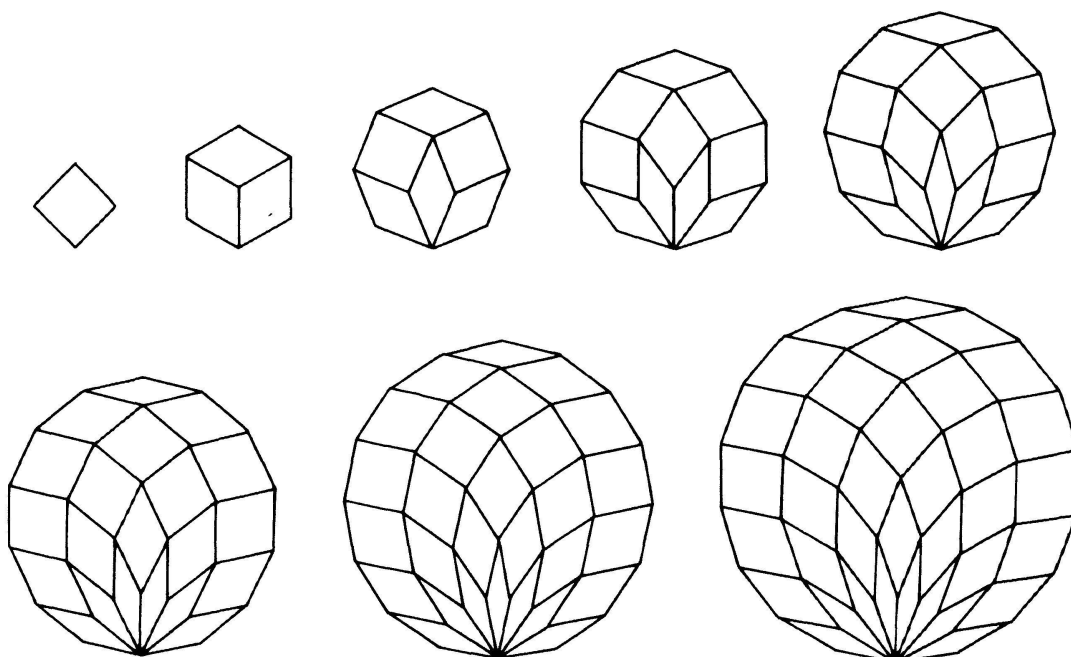
Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Elementarmathematik und Didaktik

Zerlegung von regulären $2n$ -Ecken

Im Rahmen einer experimentellen Untersuchung über Tragwerke von Sonnenspiegeln entdeckten wir eine interessante Eigenschaft regulärer $2n$ -Ecke:



Figur 1

Ein reguläres $2n$ -Eck kann in $\binom{n}{2}$ Rhomben gleicher Seitenlänge zerlegt werden (Fig. 1).

Dieses Rhomben-Puzzle streift verschiedene Gebiete des Elementarunterrichts: Symmetrien, Kombinatorik, Flächenzerlegung, arithmetische Folgen.

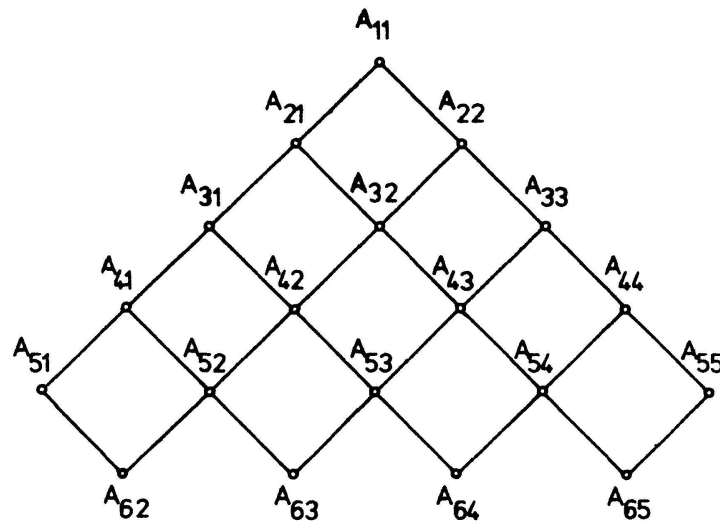
Zum Beweis der Zerlegungseigenschaft denken wir uns ein ebenes Gelenkmodell gemäss Figur 2 (Figur für $n=5$) mit Gelenken in den Punkten A_{ij} und gleich langen Stangen dazwischen. Im Rhombus $A_{ij}A_{i+1,j}A_{i+2,j+1}A_{i+1,j+1}$ (Fig. 3) führen wir die Winkel α_{ij} und β_{ij} ein. Wir deformieren nun das Gelenkmodell so, dass

$$\alpha_{i,j} = \left(1 - \frac{i}{n}\right)\pi \quad \text{und} \quad \beta_{i,j} = \frac{i}{n}\pi.$$

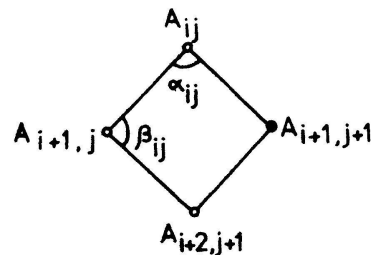
Dies ist widerspruchsfrei möglich, weil sich für einen *innern Punkt* $A_{i,j}$ die Winkelsumme

$$\begin{aligned} &\alpha_{i,j} + \beta_{i-1,j} + \alpha_{i-2,j-1} + \beta_{i-1,j-1} \\ &= \left(1 - \frac{i}{n}\right)\pi + \frac{i-1}{n}\pi + \left(1 - \frac{i-2}{n}\right)\pi + \frac{i-1}{n}\pi = 2\pi \end{aligned}$$

ergibt.



Figur 2



Figur 3

In den *Randpunkten* erhält man folgende Innenwinkel:

a) Der Randpunkt A_{11} hat den Innenwinkel

$$\alpha_{1,1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi.$$

b) In den Randpunkten $A_{i,1}$, $i \in \{2, \dots, n-1\}$ erhält man den Innenwinkel

$$\alpha_{i,1} + \beta_{i-1,1} = \left(1 - \frac{i}{n}\right)\pi + \frac{i-1}{n}\pi = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi.$$

Analog verfährt man für die Randpunkte $A_{i,i}$, $i \in \{2, \dots, n-1\}$.

c) In den Randpunkten $A_{n,1}$ und $A_{n,n}$ erhält man die Innenwinkel

$$\beta_{n-1,1} = \beta_{n-1,n-1} = \frac{n-1}{n}\pi = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi.$$

d) Wegen

$$\alpha_{n,j} = \left(1 - \frac{n}{n}\right)\pi = 0.$$

fallen die Punkte $A_{n+1,2}, \dots, A_{n+1,n}$ zusammen. In diesem Punkt erhält man den Innenwinkel

$$(n-1)\alpha_{n-1,j} = (n-1) \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \pi = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi.$$

Das deformierte Gelenkmodell bildet also ein regelmässiges $2n$ -Eck.

Wir danken Herrn H. Walser (Frauenfeld) für die grosszügige Mithilfe bei der Überarbeitung des Aufsatzes; die originelle Idee des Gelenkmodells stammt von ihm.

H. Pfeiffer und A. Romer, Minusio

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/060157-03\$1.50 + 0.20/0

Ein Zerlegungssatz für punktsymmetrische konvexe Vielecke

Ein punktsymmetrisches Vieleck hat eine gerade Eckenzahl. Wir bezeichnen die $2n$ -Ecken ($n \geq 2$) mit $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ und beweisen mit Induktion nach n folgenden Satz:

Ein punktsymmetrisches konvexes $2n$ -Eck ist in $\binom{n}{2}$ Parallelogramme zerlegbar.

- I. Für $n = 2$ ist der Satz trivial.
- II. Der Satz sei wahr für $(n - 1)$.

Wir verschieben nun die Ecken B_1, \dots, B_n um den Vektor $\vec{a}_1 = \overline{B_n A_1}$ und erhalten mit den Bildpunkten B'_1, \dots, B'_n eine Zerlegung des $2n$ -Eckes in $(n - 1)$ Parallelogramme $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$, $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ und ein $2(n - 1)$ -Eck $A_1, \dots, A_n = B'_1, \dots, B'_n = A_1$. Dieses $2(n - 1)$ -Eck ist als Durchschnitt der beiden $2n$ -Ecke $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ und $A'_1, \dots, A'_n, B'_1, \dots, B'_n$ ebenfalls konvex; ferner hat es ein Symmetriezentrum, nämlich das um $a_1/2$ verschobene Symmetriezentrum des ursprünglichen $2n$ -Eckes.

Das $2(n - 1)$ -Eck ist also nach Induktionsvoraussetzung in $\binom{n-1}{2}$ Parallelogramme zerlegbar. Damit ist das $2n$ -Eck in $(n - 1) + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{2}$ Parallelogramme zerlegbar.

Zusätze

- 1. Es sei $\vec{a}_1 = \overline{B_n A_1}$, $\vec{a}_2 = \overline{A_1 A_2}$, ..., $\vec{a}_k = \overline{A_{k-1} A_k}$, ..., $\vec{a}_n = \overline{A_{n-1} A_n}$.

Die $\binom{n}{2}$ Parallelogramme der Zerlegung sind diejenigen Parallelogramme, welche durch je zwei Vektoren aus $\{a_1, \dots, a_n\}$ aufgespannt werden.