

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 3

PDF erstellt am: **27.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Aufgaben

**Aufgabe 896.** If  $a_1, a_2, a_3$  are the sides of a triangle  $A_1A_2A_3$  and  $R_1, R_2, R_3$  are the distances from an arbitrary point  $P$  in the plane of the triangle to the vertices  $A_1, A_2, A_3$ , prove that

$$\sum_{i=1}^3 a_i R_i (a_i^4 + R_i^4) \geq 10 \prod_{i=1}^3 a_i R_i.$$

M.S. Klamkin, Edmonton, CDN

Solution: We use complex numbers. Take  $P$  to be the origin of the complex plane and let  $A_1, A_2, A_3$  be represented by the complex numbers  $u, v, w$ , respectively. The following identity is easily verified:

$$\sum \{u(v-w)^5 + u^5(v-w)\} = 10uvw \prod (v-w).$$

Hence, using the triangle inequality we get

$$\sum |v-w| |u| \{|v-w|^4 + |u|^4\} \geq 10 \prod |u| \prod |v-w|.$$

This is the desired result, since  $|v-w| = a_1, |u| = R_1$ , etc.

L. Kuipers, Sierre

Comment by the proposer. It is easily seen that equality holds if the triangle is equilateral and it is conjectured that this is the only case for equality (assuming the triangle is non-degenerate).

**Aufgabe 897.** Für positive reelle  $x$  und natürliche  $n$  sei

$$S_n(x) := \sum_{\substack{1 \leq k \leq x \\ (k,n)=1}} \mu(k) [x/k]$$

( $\mu$ : Möbiusfunktion,  $[ ]$ : Ganzzteilfunktion). Man zeige:  $S_n(x)$  ist gleich der Anzahl der Teiler  $t$  von  $n^{\lceil \log_2 x \rceil}$  mit  $t \leq x$ .

K. Szabo, Miskolc, Ungarn

Lösung: Für  $n \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{R}_+$  sei  $T_n(y) := \sum_{\substack{1 \leq t \leq y \\ t|n^{\lceil \log_2 y \rceil}}} 1$ . Sei  $m$  eine beliebige natürliche Zahl  $\leq x$ .

Dann kann  $m$  eindeutig geschrieben werden in der Form  $m = j \cdot t$  mit  $(j, n) = 1$  und  $t$  enthält genau die Primfaktoren von  $m$ , die auch in  $n$  vorkommen. Ist  $p^\lambda || t$ , so  $2^\lambda \leq p^\lambda \leq x/j$  und damit  $\lambda \leq \lceil \log_2 x/j \rceil$  und also  $t|n^{\lceil \log_2 x/j \rceil}$ . Daraus folgt

$$[x] = \sum_{m \leq x} 1 = \sum_{\substack{j \leq x \\ (j,n)=1}} \sum_{\substack{t \leq x/j \\ t|n^{\lceil \log_2 x/j \rceil}}} 1 = \sum_{\substack{j \leq x \\ (j,n)=1}} T_n(x/j) = \sum_{j \leq x} \chi_n(j) T_n(x/j),$$

wo  $\chi_n$  den Hauptcharakter modulo  $n$  bezeichnet. Nach Definition von  $S_n(x)$  in der Aufgabenstellung folgt daraus unter Berücksichtigung der vollständigen Multiplikatивität von  $\chi_n$

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= \sum_{k \leq x} \mu(k) \chi_n(k) [x/k] = \sum_{k \leq x} \sum_{j \leq x/k} \mu(k) \chi_n(k) \chi_n(j) T_n(x/jk) \\
 &= \sum_{l \leq x} \chi_n(l) T_n(x/l) \sum_{k|l} \mu(k) = \sum_{l \leq x} \chi_n(l) T_n(x/l) \delta_{1,l} = T_n(x)
 \end{aligned}$$

mit den Kroneckerschen  $\delta$ , was die Behauptung beweist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Leu (Hongkong), I. Merényi (Cluj, Rumänien), L. Cseh (Cluj, Rumänien).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis 10. Dezember 1984 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68). Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

**Aufgabe 908.** Show that the length of a side of the Morley triangle of a given triangle  $T$  is less than one third the length of the smallest side of  $T$ . (The Morley triangle of  $T$  is the equilateral triangle formed by the intersection in pairs of the angle trisectors of  $T$ .)

M. S. Klamkin, Alberta, CDN  
R. Spira, Ashland, Oregon, USA

**Aufgabe 909.** Welche zahlentheoretische Funktion wird durch

$$f(n) := [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}]; \quad n \in \mathbf{N}$$

dargestellt?

H. Kappus, Rodersdorf

## Literaturüberschau

J. Fresnel, M. van der Put: Géométrie Analytique Rigide et Applications. Progress in Mathematics, Band 18. XII und 215 Seiten. Fr. 30.-. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1981.

Ce livre a pour origine un cours de troisième cycle. Dans la première partie, les auteurs introduisent de façon très claire les bases de la théorie des fonctions analytiques et des espaces analytiques sur un corps valué complet pour une valuation nonarchimédienne. La deuxième partie est consacrée à quelques applications importantes. La première application, qui donne la représentation analytique d'une courbe algébrique sur un corps valué complet, est aussi la motivation historique de cette théorie. M.-A. Knus