Schwach verkoppelte Ungleichungssysteme und konvexe Spline-Interpolation

Autor(en): **Schmidt, J.W. / Hess, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 4

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-38020

Schwach verkoppelte Ungleichungssysteme und konvexe Spline-Interpolation

1. Einleitung

Die Frage, ob man durch $n+1$ konvex angeordnete Punkte (x_0, f_0), (x_1, f_1), $\ldots$, (x_n, f_n) einen konvexen kubischen Spline legen kann, lässt sich in äquivalenter Weise auf die Lösbarkeit des Ungleichungssystems

$$\begin{aligned} 2m_{i-1} + m_i &\leqq 3\tau_i \\ m_{i-1} + 2m_i &\geqq 3\tau_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

zurückführen, falls man

$$\tau_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \qquad h_i = x_i - x_{i-1} \tag{2}$$

setzt, s. Neuman [5]. Die zu ermittelnden Grössen $m_0, m_1, \ldots, m_n$ sind gleich der ersten Ableitung des Interpolations-Splines in den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Das System (1) ist durchaus nicht immer lösbar. Hinreichende Bedingungen und einen Lösungsvorschlag findet man bei Mettke und Lingner [4].

In der vorliegenden Mitteilung wird die beschriebene Aufgabe vollständig abgehandelt. Es werden für Ungleichungssysteme vom Typ (1) eine hinreichende und notwendige Lösbarkeitsbedingung angegeben und alle bei deren Erfülltsein vorhandenen Lösungen konkret benannt. Der Aufwand zur Errechnung einer Lösung ist dabei proportional zu n.

Zunächst erfolgt die Vorstellung des Lösungsalgorithmus für Ungleichungssysteme vom Typ (1). Danach wird das zugrunde liegende allgemeine Prinzip herausgestellt. Den Abschluss bilden Anwendungen der Ergebnisse über Ungleichungssysteme auf die konvexe Spline-Interpolation. Insbesondere ergibt sich, dass man zu streng konvex angeordneten Punkten immer konvexe Interpolations-Splines finden kann, sofern man den Grad des Splines hoch genug wählt.

2. Der Lösungsalgorithmus

Es wird das schwach verkoppelte Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_i m_{i-1} + \beta_i m_i &\leqq \tau_i \\ \gamma_i m_{i-1} + \delta_i m_i &\geqq \tau_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

für die reellen Zahlen $m_0, m_1, \ldots, m_n$ betrachtet. Die Konstanten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ und τ_i sollen den Bedingungen

$$\tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \ldots \leqq \tau_n \tag{4}$$

$$\alpha_i + \beta_i = 1, \qquad \gamma_i + \delta_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

$$0 < \gamma_i < \alpha_i, \quad 0 < \beta_i < \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

genügen. Das System (1) ist von diesem Typ, wobei die Forderung (4) im Falle $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ mit der konvexen Anordnung der Punkte (x_i, f_i) gleichwertig ist.
Das zu beschreibende Verfahren besteht aus einem Vorwärts- und einem Rückwärtsschritt.

Vorwärtsschritt: *Man setze*

$$a_0 = -\infty, \quad b_0 = \tau_1 \tag{7a}$$

und für $i = 1, 2, \ldots, n$, *sofern* $a_{i-1} \leqq \tau_i$ *gilt,*

$$a_i = \max\left\{\tau_i, \frac{\tau_i - \gamma_i b_{i-1}}{\delta_i}\right\}, \quad b_i = \frac{\tau_i - \alpha_i a_{i-1}}{\beta_i}. \tag{7b}$$

Rückwärtsschritt: *Man wähle*

$$m_n \in [c_n, d_n] \quad \textit{mit} \quad c_n = a_n, \quad d_n = b_n \tag{8a}$$

und für $i = n, n-1, \ldots, 1$

$$\begin{gathered} m_{i-1} \in [c_{i-1}, d_{i-1}] \quad \textit{mit} \\ c_{i-1} = \max\left\{a_{i-1}, \frac{\tau_i - \delta_i m_i}{\gamma_i}\right\}, \quad d_{i-1} = \min\left\{b_{i-1}, \frac{\tau_i - \beta_i m_i}{\alpha_i}\right\}. \end{gathered} \tag{8b}$$

Zum Beispiel kann man für m_{i-1} stets die untere oder stets die obere Intervallgrenze nehmen.
Das Hauptergebnis dieser Mitteilung ist der folgende

Satz 1: *Das Ungleichungssystem* (3) *ist bei Vorliegen der Eigenschaften* (4), (5) *und* (6) *genau dann lösbar, wenn die Ungleichungen*

$$a_{i-1} \leqq \tau_i \quad (i = 4, \ldots, n) \tag{9}$$

bestehen. Alle Lösungen von (3) *können bei Erfülltsein von* (9) *durch die Vorschrift* (8) *erhalten werden.*

Bemerkung 1: Die in (9) fehlenden Ungleichungen

$$a_0 \leqq \tau_1, \quad a_1 \leqq \tau_2, \quad a_2 \leqq \tau_3$$

sind in der Tat entbehrlich, da sie, wie man leicht nachrechnet, immer gelten. Das System (3) ist daher für $n \leqq 3$ stets lösbar.

Bemerkung 2: Der Satz 1 bleibt gültig, wenn man in (7a)

$$a_0 = (\tau_1 - \delta_1 \tau_2)/\gamma_1$$

oder in (7b)

$$b_i = \min\left\{\tau_{i+1}, \frac{\tau_i - \alpha_i a_{i-1}}{\beta_i}\right\}$$

setzt.

Bemerkung 3: Ändert man im Fall $\tau_1 \geqq 0$ den Start (7a) zu

$$a_0 = 0\,, \qquad b_0 = \tau_1$$

ab, wird die Bedingung (9) hinreichend und notwendig für die nichtnegative Lösbarkeit des Ungleichungssystems (3), und alle nichtnegativen Lösungen von (3) können mit Hilfe von (8) gefunden werden.

Beweis von Satz 1: Die Notwendigkeit der Forderung (9) sowie eine Lokalisierung der Lösungen ergeben sich unmittelbar aus dem

Lemma 1: *Falls es Zahlen $m_0, m_1, \ldots, m_j$ gibt, welche den Ungleichungen* (3) *für $i = 1, \ldots, j$ ($1 \leqq j \leqq n$) genügen, sind die Beziehungen*

$$a_{j-1} \leqq \tau_j\,, \qquad a_j \leqq m_j \leqq b_j \tag{10}$$

gültig.

Dem Beweis von Lemma 1 wird die folgende Aussage vorangestellt:

Aussage 1: *Es gelten*

$$m_{j-1} \leqq \tau_j\,, \qquad m_j \geqq \tau_j\,, \tag{11}$$

sofern m_{j-1}, m_j die Ungleichungen (3) *für $i = j$ erfüllen.*

In diesem Fall ergeben sich nämlich

$$(\alpha_j \delta_j - \beta_j \gamma_j)\, m_{j-1} \leqq (\delta_j - \beta_j)\, \tau_j\,,$$
$$(\alpha_j \delta_j - \beta_j \gamma_j)\, m_j \quad \geqq (\delta_j - \beta_j)\, \tau_j\,,$$

woraus wegen $\alpha_j \delta_j - \beta_j \gamma_j = \delta_j - \beta_j > 0$ bereits (11) folgt.

Das Lemma 1 kann nun durch Induktion bewiesen werden. Die für $j = 1$ zu bestätigenden Ungleichungen $a_0 \leqq \tau_1$, $a_1 \leqq m_1 \leqq b_1$ sind unter Beachtung von (11) wegen $a_0 = -\infty$, $a_1 = \tau_1$ und $b_1 = +\infty$ gültig.

Für den Schluß von $j-1$ auf j ist nach der Induktionsannahme

$$a_{j-1} \leqq m_{j-1} \leqq b_{j-1}\,.$$

Wegen (11) gilt daher

$$a_{j-1} \leqq m_{j-1} \leqq \tau_j\,.$$

Ebenso ist $m_j \geqq \tau_j$, und aus (3) folgen

$$m_j \geqq \frac{\tau_j - \gamma_j m_{j-1}}{\delta_j} \geqq \frac{\tau_j - \gamma_j b_{j-1}}{\delta_j}\,,$$

$$m_j \leqq \frac{\tau_j - \alpha_j m_{j-1}}{\beta_j} \leqq \frac{\tau_j - \alpha_j a_{j-1}}{\beta_j}\,,$$

so dass sich in Abschluss des Induktionsbeweises für Lemma 1

$$a_j \leqq m_j \leqq b_j$$

ergibt.

Bemerkung 4: Da es leicht möglich ist, Zahlen $\tau_1 \leqq \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$ so zu wählen, dass $a_3 > \tau_4$ wird, ist das zugehörige System (3) auf Grund von Lemma 1 dann nicht lösbar.
Um die Hinlänglichkeit der Forderung (9) zu bestätigen, wird zunächst die folgende Aussage bewiesen:

Aussage 2: *Im Falle* (9) *gilt*

$$a_i \leqq b_i \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{12}$$

Denn für $i = 0$ ist $b_0 - a_0 = +\infty > 0$, während man beim Schluss von $i-1$ nach i sowohl im Fall $a_i = \tau_i$ zu

$$b_i - a_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i}(\tau_i - a_{i-1}) \geqq 0$$

als auch im Fall $a_i = (\tau_i - \gamma_i b_{i-1})/\delta_i$ zu

$$b_i - a_i = \frac{\gamma_i}{\delta_i}(b_{i-1} - a_{i-1}) + \left(\frac{1}{\beta_i} - \frac{1}{\delta_i}\right)(\tau_i - a_{i-1}) \geqq 0\,,$$

also zur gewünschten Ungleichung kommt.

Bemerkung 5: Berechnet man a_j und b_j auch beim Vorliegen von

$$a_{i-1} \leqq \tau_i \quad \text{für} \quad i = 4, 5, \ldots, j-1 \quad \text{und} \quad a_{j-1} > \tau_j$$

nach der Vorschrift (7b), so ergibt sich die unerwünschte Ungleichung

$$a_j > b_j\,.$$

In der Tat, es ist $\tau_j - \gamma_j b_{j-1} \leqq \tau_j - \gamma_j a_{j-1} < \tau_j - \gamma_j \tau_j = \delta_j \tau_j$; daher folgen $a_j = \tau_j$ und schliesslich

$$b_j - a_j = \frac{\alpha_j}{\beta_j}(\tau_j - a_{j-1}) < 0\,.$$

Lemma 2: *Es gelte* (9). *Dann sind durch* (8) *Zahlen* m_n, m_{n-1}, …, m_{j-1} *erklärt, welche die Ungleichungen* (3) *für* $i = n, n-1, \ldots, j$ *erfüllen, und es ist*

$$c_{j-1} \leqq m_{j-1} \leqq d_{j-1} \quad (j \geqq 1)\,. \tag{13}$$

Beweis durch Induktion: Für $j = n+1$ wird nur die mit (8a) übereinstimmende Ungleichung $c_n \leqq m_n \leqq d_n$ verlangt. Der Schluss von $j+1$ auf j erfordert zuerst den Nachweis von

$$c_{j-1} \leqq d_{j-1}\,, \tag{14}$$

um m_{j-1} nach der Vorschrift (8b) wählen zu können. Wegen (7b) und der Induktionsannahme (13) ist $\tau_j \leqq a_j \leqq c_j \leqq m_j$ und somit unter Beachtung von (5) und (6)

$$\frac{\tau_j - \delta_j m_j}{\gamma_j} \leqq \frac{\tau_j - \beta_j m_j}{\alpha_j}.$$

Ausserdem ergibt (7b) zusammen mit der Induktionsannahme (13)

$$\tau_j = \alpha_j a_{j-1} + \beta_j b_j \geqq \alpha_j a_{j-1} + \beta_j m_j,$$
$$\tau_j \leqq \gamma_j b_{j-1} + \delta_j a_j \leqq \gamma_j b_{j-1} + \delta_j m_j;$$

daher erhält man

$$\frac{\tau_j - \delta_j m_j}{\gamma_j} \leqq b_{j-1}, \qquad a_{j-1} \leqq \frac{\tau_j - \beta_j m_j}{\alpha_j},$$

so dass zusammen mit $a_{j-1} \leqq b_{j-1}$ aus Aussage 2 die Gültigkeit von (14) folgt. Es ist also m_{j-1} erklärt und wegen

$$m_{j-1} \leqq d_{j-1} \leqq \frac{\tau_j - \beta_j m_j}{\alpha_j}, \qquad m_{j-1} \geqq c_{j-1} \geqq \frac{\tau_j - \delta_j m_j}{\gamma_j}$$

erfüllen m_{j-1}, m_j die Ungleichungen (3) für $i=j$. Damit ist das Lemma 2 bewiesen.

Dieses Lemma impliziert die Hinlänglichkeit von (9) für die Lösbarkeit von (3). Ausserdem ist bewiesen, dass die durch (8) jeweils definierten Zahlen $m_0, m_1, \dots, m_n$ eine Lösung von (3) sind. Es bleibt der Nachweis, dass man durch (8) alle Lösungen von (3) erhalten kann.

In der Tat, falls $m_0, m_1, \dots, m_n$ irgendeine Lösung von (3) ist, gilt nach Lemma 1

$$a_i \leqq m_i \leqq b_i \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Insbesondere ist also $c_n = a_n \leqq m_n \leqq b_n = d_n$. Es seien nun bereits

$$c_i \leqq m_i \leqq d_i \quad \text{für} \quad i = n, n-1, \dots, j$$

bestätigt, dann liefert (3) für $i=j$

$$m_{j-1} \geqq \frac{\tau_j - \delta_j m_j}{\gamma_j}, \qquad m_{j-1} \leqq \frac{\tau_j - \beta_j m_j}{\alpha_j},$$

also ist auch $c_{j-1} \leqq m_{j-1} \leqq d_{j-1}$. Die vorgegebene Lösung kann daher durch die Formel (8) erhalten werden. Dies vervollständigt den Beweis des Satzes 1.

Bemerkung 6: Wird die Voraussetzung (6) durch

$$0 < \alpha_i < \gamma_i, \qquad 0 < \delta_i < \beta_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ersetzt, ist das Ungleichungssystem (3) im Falle $n \geqq 2$ widersprüchlich, sofern nicht alle τ_i's gleich sind.
Denn ist z. B. $\tau_j < \tau_{j+1}$, ergeben sich wie beim Nachweis der Aussage 1 wegen $\delta_j - \beta_j < 0$, $\delta_{j+1} - \beta_{j+1} < 0$ die nicht zu vereinbarenden Ungleichungen $m_j \leqq \tau_j$ und $m_j \geqq \tau_{j+1}$. Im Falle $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n$ ist $m_0 = m_1 = \ldots = m_n = \tau_1$ die Lösung von (3)

Bemerkung 7: Wird an Stelle von (6)

$$0 < \alpha_i = \gamma_i, \quad 0 < \beta_i = \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

verlangt, geht (3) in ein lösbares System von gestaffelten Gleichungen über.

3. Eine allgemeine Formulierung des Algorithmus

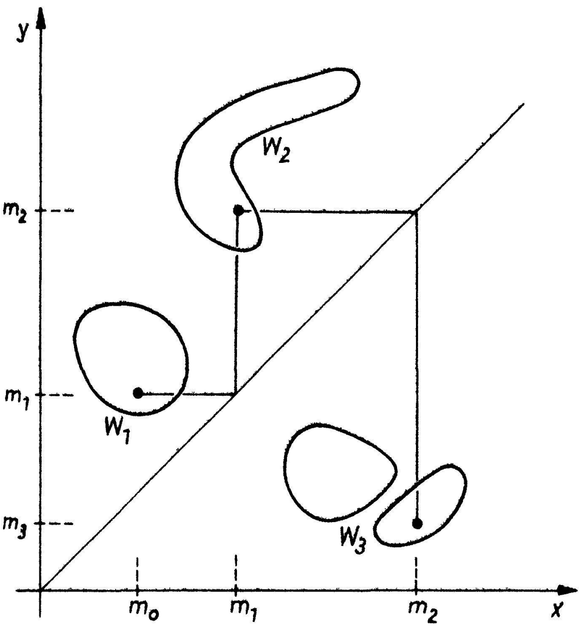
Es seien eine nichtleere Menge B und n nichtleere Teilmengen

$$W_i \subset B \times B \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vorgegeben. Gesucht sind Elemente $m_0, m_1, \ldots, m_n \in B$, welche den Bedingungen

$$(m_{i-1}, m_i) \in W_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

genügen.



Figur 1. Veranschaulichung von Aufgabe (15) für $B = R^1$: Gibt es einen achsenparallelen bezüglich der Winkelhalbierenden alternierenden Polygonzug durch W_1, W_2, W_3?

Im vorangehenden Beispiel ist $B = R^1$ zu setzen, während die Teilmengen

$$W_i = \{(x, y) \in R^2\colon\ \alpha_i x + \beta_i y \leqq \tau_i,\ \ \gamma_i x + \delta_i y \geqq \tau_i\}$$

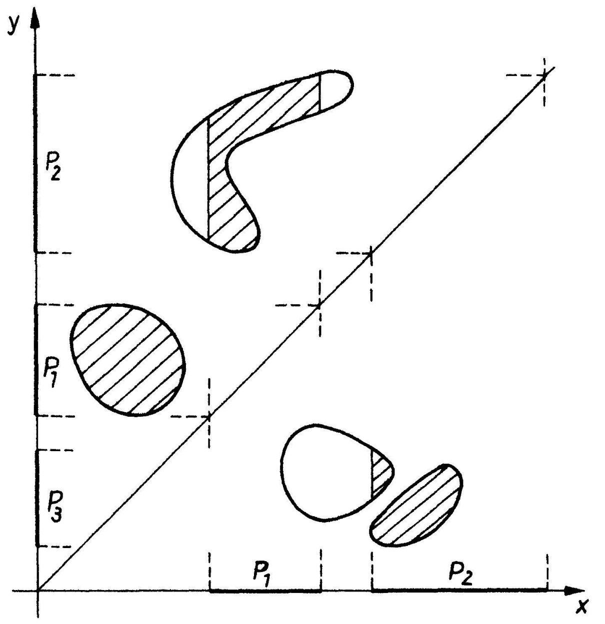
Kegel im R^2 sind.
Das Lösungsverfahren für die Aufgabe (15) setzt sich wiederum aus einem Vorwärts- und einem Rückwärtsschritt zusammen.

Vorwärtsschritt: *Man setze*

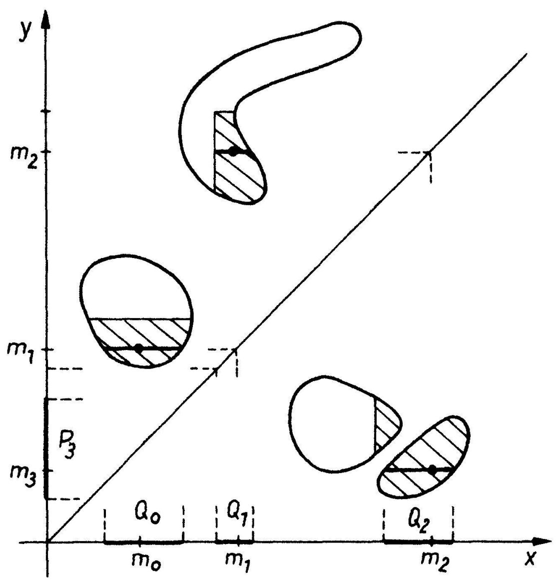
$$P_0 = B \tag{16a}$$

und für $i = 1, 2, \ldots, n$, *sofern* $P_{i-1} \neq \emptyset$ *gilt,*

$$P_i = \{y \in B : x \in P_{i-1} \quad \text{vorhanden mit} \quad (x, y) \in W_i\}\,. \tag{16b}$$



Figur 2. Veranschaulichung des Vorwärtsschrittes (16): Übergang von P_{i-1} zu P_i.



Figur 3. Veranschaulichung des Rückwärtsschrittes (17): Ermittlung von Q_{i-1} zu $m_i \in Q_i$.

Wird der Vorwärtsschritt nicht vorzeitig beendet und ist auch $P_n \neq \emptyset$, kommt es zum

Rückwärtsschritt: *Man wähle*

$$m_n \in P_n \tag{17a}$$

und für $i = n, n-1, \ldots, 1$

$$m_{i-1} \in Q_{i-1} = P_{i-1} \cap \{x \in B : (x, m_i) \in W_i\}\,. \tag{17b}$$

Dieser Algorithmus erlaubt die folgende Lösbarkeitsaussage für die aus (15) hervorgehende Aufgabe:

Satz 2: *Die Aufgabe* (15) *ist genau dann lösbar, wenn die Beziehungen*

$$P_i \neq \emptyset \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{18}$$

bestehen. Alle Lösungen von (15) *können bei Vorliegen von* (18) *durch den Algorithmus* (16), (17) *erhalten werden.*

Die in (18) fehlende Beziehung $P_1 \neq \emptyset$ braucht nicht angeführt zu werden, da sie stets gültig ist. Den Vorwärtsschritt kann man auch mit

$$P_0 = \{x \in B : y \in B \text{ vorhanden mit } (x, y) \in W_1\}$$

beginnen.
Auf die Wiedergabe eines Beweises zum Satz 2 wird verzichtet, da er dem Prinzip nach wie beim Satz 1 geführt werden kann.

4. Anwendung auf die konvexe Spline-Interpolation

Zur konvexen Spline-Interpolation liegen zahlreiche Arbeiten vor, u.a. [1]–[9]. Die Absicherung der Konvexität des Splines erfolgt dort auf verschiedene Weise, etwa durch Aufstellung von weiteren, über (4) hinausgehenden Bedingungen an die Eingangsgrößen, durch Einführung zusätzlicher Spline-Knoten und durch Beeinflussung der Lage und Defekte der Spline-Knoten.
Jetzt wird vor allem gezeigt, dass man bei festen, streng konvex angeordneten Eingangsdaten (x_0, f_0), (x_1, f_1), ..., (x_n, f_n) stets konvexe Interpolations-Splines konstruieren kann, wenn man nur den Grad des Splines hoch genug wählt.
Der Spline s vom Grad $k \geqq 3$ sei auf dem Gitter

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

definiert und beispielsweise einmal stetig differenzierbar. Es werden bei vorgegebenen Werten $f_0, f_1, \ldots, f_n$ und mit Parametern $m_0, m_1, \ldots, m_n$ die Interpolations- und Glattheitsbedingungen

$$\begin{aligned} s(x_{i-1}+0) &= f_{i-1}, \quad & s(x_i - 0) &= f_i \\ s'(x_{i-1}+0) &= m_{i-1}, \quad & s'(x_i - 0) &= m_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sowie die speziellen Bedingungen

$$s''(x_{i-1}+0) = \ldots = s^{(k-2)}(x_{i-1}+0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gestellt, s. Neumann [7]. Der Ansatz

$$s(x) = f_{i-1} + m_{i-1}(x - x_{i-1}) + p_i (x - x_{i-1})^{k-1} + q_i (x - x_{i-1})^k, \tag{19}$$

gültig für $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$, berücksichtigt die den Knoten x_{i-1} betreffenden Forderungen, die restlichen führen auf

$$\begin{aligned} p_i &= \{k\,\tau_i - m_i - (k-1)\,m_{i-1}\}/h_i^{k-2}, \\ q_i &= \{m_i + (k-2)\,m_{i-1} - (k-1)\,\tau_i\}/h_i^{k-1} \end{aligned} \tag{20}$$

mit den durch (2) erklärten Zahlen τ_i. Wegen

$$s''(x) = (k-1)(x - x_{i-1})^{k-3}\{(k-2)\,p_i + k\,q_i\,(x - x_{i-1})\}$$

ist $s''(x) \geqq 0$ gleichwertig mit

$$p_i \geqq 0\,, \qquad (k-2)\,p_i + k\,h_i\,q_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

also gilt die

Aussage 3: *Der einmal stetig differenzierbare Interpolations-Spline* (19), (20) *vom Grade $k \geqq 3$ ist genau dann konvex, wenn seine ersten Ableitungen in den Knoten, nämlich $m_0, m_1, \ldots, m_n$, das Ungleichungssystem*

$$\begin{aligned} &(k-1)\,m_{i-1} + m_i \leqq k\,\tau_i\,, \\ &(k-2)\,m_{i-1} + 2m_i \geqq k\,\tau_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

mit den Quotienten τ_i aus (2) *erfüllen.*

Dieses Ungleichungssystem ist vom Typ (3), und es sind die Voraussetzungen (5), (6) gültig. Für $k = 3$ entsteht (1).
Die Lösbarkeit des Systems (21) kann mit Hilfe des Satzes 1 entschieden werden. Dazu ist zu überprüfen, ob die Bedingung (9) besteht; die Vorschrift (7) lautet jetzt:

$$a_0 = -\infty\,, \qquad b_0 = \tau_1\,, \tag{22a}$$

und für $i = 1, 2, \ldots, n$, solange $a_{i-1} \leqq \tau_i$ ist,

$$\begin{aligned} a_i &= \max\left\{\tau_i,\ b_{i-1} + \frac{k}{2}\,(\tau_i - b_{i-1})\right\}, \\ b_i &= a_{i-1} + k\,(\tau_i - a_{i-1})\,. \end{aligned} \tag{22b}$$

Für (9) reicht offenbar

$$a_i = \tau_i \qquad (i = 3, 4, \ldots, n-1) \tag{23}$$

hin; $a_1 = \tau_1$ und $a_2 = \tau_2$ gelten dabei stets. Falls nun der Grad k des Splines als wählbar angenommen wird, lässt sich (23) immer erreichen, sofern man (4) zu

$$\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n \tag{24}$$

verschärft. In der Tat, wenn von $a_i = \tau_i$ für $i = 1, 2, \ldots, j-1$ ($j \geqq 3$) ausgegangen wird, erhält man $a_{j-1} = \tau_{j-1} < \tau_j$, womit a_j und b_j erklärt sind. Weiterhin ergibt sich

$$b_{j-1} = \tau_{j-2} + k\,(\tau_{j-1} - \tau_{j-2}) \geqq \tau_j\,,$$

falls nur

$$k \geqq \frac{\tau_j - \tau_{j-2}}{\tau_{j-1} - \tau_{j-2}}$$

gilt, und es folgt $b_{j-1} + k\,(\tau_j - b_{j-1})/2 \leqq \tau_j$. Daher wird $a_j = \tau_j$. Zusammenfassend erhält man den

Satz 3: *Für die Differenzenquotienten τ_i aus* (2) *gelte* (24), *und $k \geqq 3$ erfülle*

$$k \geqq \frac{\tau_i - \tau_{i-2}}{\tau_{i-1} - \tau_{i-2}} \quad (i = 3, 4, \ldots, n-1) \,. \tag{25}$$

Dann hat (21) *eine Lösung $m_0, m_1, \ldots, m_n$ und der zugehörige einmal stetig differenzierbare Interpolations-Spline* (19), (20) *vom Grade k ist konvex.*

Bemerkung 8: Im Falle

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n$$

ist $m_0 = m_1 = \ldots = m_n = \tau_1$ unabhängig von k eine Lösung von (21). Daher gibt es dann sogar einen konvexen Interpolations-Spline vom Grade 3. Ist dagegen z. B.

$$\tau_1 = \tau_2 < \tau_3 \leqq \tau_4 \,,$$

kann man mit Hilfe von k i. allg. nicht mehr $a_3 \leqq \tau_4$ erreichen. Somit ist bei dieser Voraussetzung nicht in jedem Fall ein konvexer Interpolations-Spline der Form (19), (20) vorhanden.
Es wird noch die folgende Erweiterung des Satzes 3 erwähnt:

Satz 4: *Bei Voraussetzung von* (24) *kann man einen μ-mal stetig differenzierbaren konvexen Interpolations-Spline vom Grade k konstruieren, wenn $k \geqq 2\mu + 1$ für $\mu \geqq 1$ die Ungleichungen*

$$k \geqq \mu \frac{\tau_i - \tau_{i-2}}{\tau_{i-1} - \tau_{i-2}} \quad (i = 3, 4, \ldots, n-1) \tag{26}$$

erfüllt.

Der Nachweis kann wie beim Satz 3 erbracht werden, falls man das folgende Ergebnis von Neumann [7] verwendet:
Ein dort explizit angegebener Interpolations-Spline vom Grade k ist genau dann konvex, wenn für seine erste Ableitung in den Knoten das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} (k - v_i + 1)\, m_{i-1} + (v_i - 1)\, m_i &\leqq k\, \tau_i \\ (k - v_i)\, m_{i-1} + v_i m_i &\geqq k\, \tau_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{27}$$

mit Zahlen $v_i \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$ besteht. Der Spline ist ausserdem μ-mal stetig differenzierbar, sofern

$$\mu = \min_{i=2,\ldots,n} \min\,(k - v_i,\; v_{i-1} - 1)$$

gesetzt wird. Im Falle (26) ist (27) bei der Wahl $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = \mu + 1$ in der Tat erfüllbar.

J. W. Schmidt und W. Hess, Technische Universität Dresden

LITERATURVERZEICHNIS

1 C. de Boor: A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1978.
2 B. Dimsdale: Convex cubic splines. J. Res. Develop. *22*, 168–178 (1978).
3 U. Hornung: Numerische Berechnung monotoner und konvexer Spline-Interpolierender. ZAMM *59*, T64–T65 (1979).
4 H. Mettke, T. Lingner: Ein Verfahren zur konvexen kubischen Splineinterpolation. Wiss. Z. TU Dresden *32*, 77–80 (1983).
5 E. Neuman: Uniform approximation by some Hermite interpolating splines. J. Comput. Appl. Math. *4*, 7–9 (1978).
6 E. Neuman: Convex interpolating splines of odd degree. Utilitas Math. *14*, 129–140 (1978).
7 E. Neuman: Shape preserving interpolation by polynomial splines. Report Nr. N-112, Institut of Computer Science, University of Wroclaw 1982.
8 E. Passow: Monotone quadratic spline interpolation. J. Approximation Theory *19*, 143–147 (1977).
9 E. Passow, J. A. Roulier: Monotone and convex spline interpolation. SIAM J. Numer. Anal. *14*, 904–909 (1977).

 0013-6018/84/040085-11$1.50 + 0.20/0

Bemerkung zu einem Satz von Glauberman

Das Ziel dieser Note ist der Nachweis, dass der unten formulierte Satz von Glauberman ([1], S. 270, Lemma 4.3, und [2], S. 165–171) auch dann gilt, wenn die Charakteristik des Koordinatenkörpers gleich 2 ist. Dieser Satz spielt eine Rolle beim Beweis eines sehr gewichtigen Theorems von Hering und Ostrom ([2], S. 178, Theorem 35.10), das von Kollineationsgruppen endlicher Translationsebenen handelt, die sich durch Scherungen erzeugen lassen.

Satz (Glauberman). *$V \neq 0$ sei ein endlicher Vektorraum und $M \subset GL(V)$ ein System von Vektorraumautomorphismen mit folgenden Eigenschaften:*

I. $\alpha \in M \Rightarrow \alpha^{-1} \in M$.
II. *$M \cup \{0\}$ ist additiv abgeschlossen.*
III. $1 \in M$.

Dann ist $M \cup \{0\}$ ein Körper.

Beweis: Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen. Der Koordinatenschiefkörper K des Vektorraumes V ist natürlich endlich. Ausserdem ist $L := M \cup \{0\}$ bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe, deren Exponent mit der Charakteristik von K übereinstimmt. Hinsichtlich der Bezeichnungsweise ist anzumerken, dass mit $\langle X \rangle$ stets das Erzeugnis der Teilmenge $X \subset GL(V)$ in der linearen Gruppe $GL(V)$ gemeint ist. Wir nehmen jetzt unsere Betrachtungen auf mit der Begründung einiger Einzelfeststellungen.