

# Über die Anzahl von Läuferstellungen auf einem $n \times n$ -Schachbrett

Autor(en): **Teschke, Helmut**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 5

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38023>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

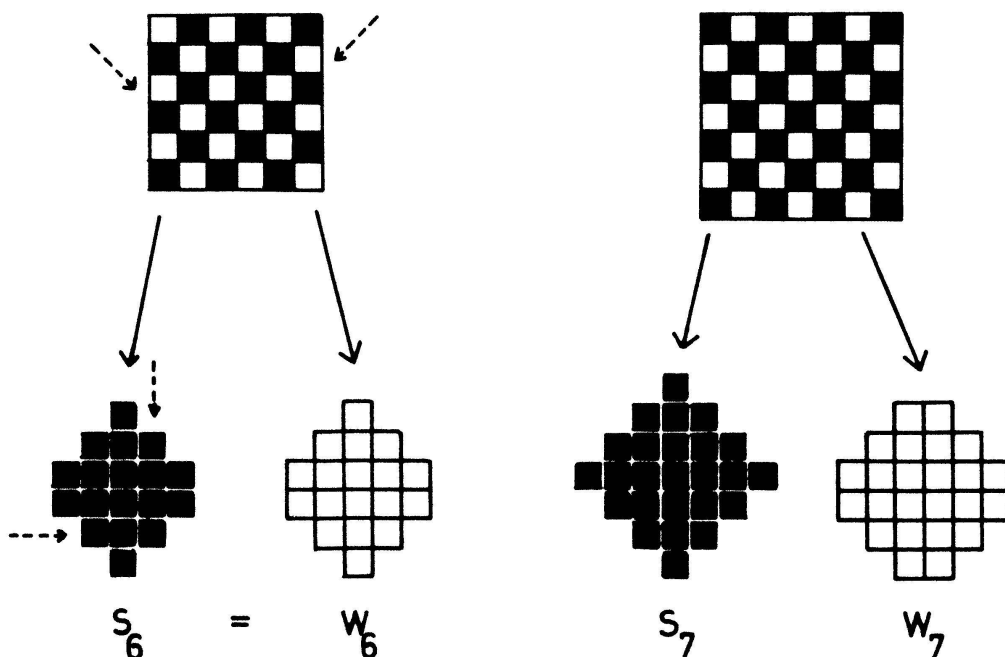
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über die Anzahl von Läuferstellungen auf einem $n \times n$ -Schachbrett

## 1. Das Problem

Wir untersuchen folgende Fragestellung: Auf wie viele Arten kann man  $k$  Läufer auf einem  $n \times n$ -Schachbrett so verteilen, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen? Wir nennen eine solche Stellung im folgenden eine erlaubte Läuferstellung. In [2] und [4] wird dieses Problem im Zusammenhang mit Simon Newcombs Problem formal behandelt, es wird jedoch keine explizite Lösung für den allgemeinen Fall angegeben. Robinson [5] betrachtet demgegenüber das Problem,  $n$  Läufer auf einem  $n \times n$ -Schachbrett so zu verteilen, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen und dabei jedes Feld von mindestens einem Läufer bedroht wird.

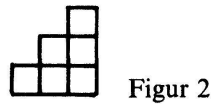
Da Läufer sich nur in Richtung der Diagonalen bewegen dürfen, zerfällt zur Beantwortung des oben gestellten Problems das Schachbrett in zwei separate Bretter, ein weisses  $W_n$  und ein schwarzes  $S_n$ . Ein Läufer auf dem Brett  $W_n$  bedroht kein Feld aus  $S_n$ , wie auch umgekehrt. Dreht man jetzt noch die Bretter  $W_n$  und  $S_n$  um  $45^\circ$ , so werden aus Feldern in Diagonalrichtung Senkrechte und Waagrechte. Die Läufer bewegen sich wie Türme auf diesen Brettern (siehe Figur 1).



Figur 1

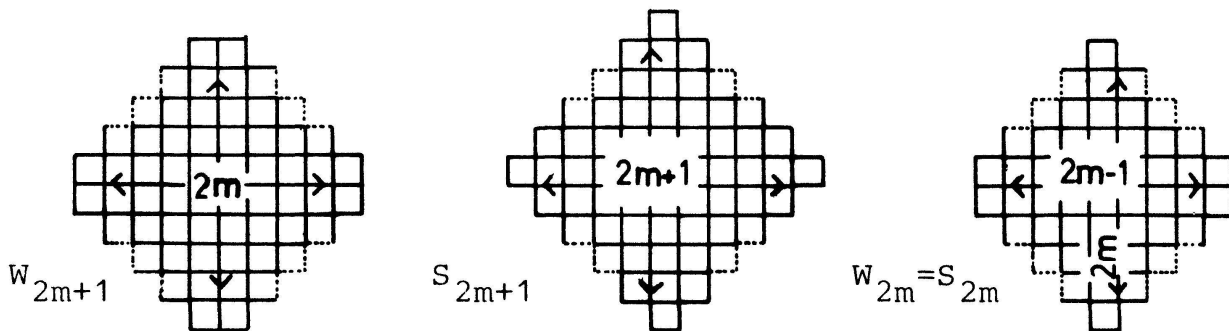
$W_n$  und  $S_n$  sind Beispiele für verallgemeinerte Schachbretter, die aus einem quadratischen Schachbrett durch Streichen beliebiger Felder entstehen. Eine Platzierung von  $k$  Türmen auf einem verallgemeinerten Schachbrett  $B$  heisst erlaubt, falls kein Turm einen anderen bedroht. Bezeichnet man mit  $t_k := t(k, B)$  die Anzahl der erlaubten Turmstellungen von  $k$  Türmen auf dem verallgemeinerten Brett  $B$ , so nennt man die Funk-

tion  $T(x, B) := \sum_{k=0}^{\infty} t_k x^k$  mit  $t_0 := 1$  Turmpolynom von  $B$ . Zum Beispiel besitzt das Brett  $B$  von Figur 2 das Turmpolynom  $T(x, B) = 1 + 6x + 7x^2 + x^3$ . Das Turmproblem für ein Brett ist somit gelöst, wenn das Turmpolynom bekannt ist.



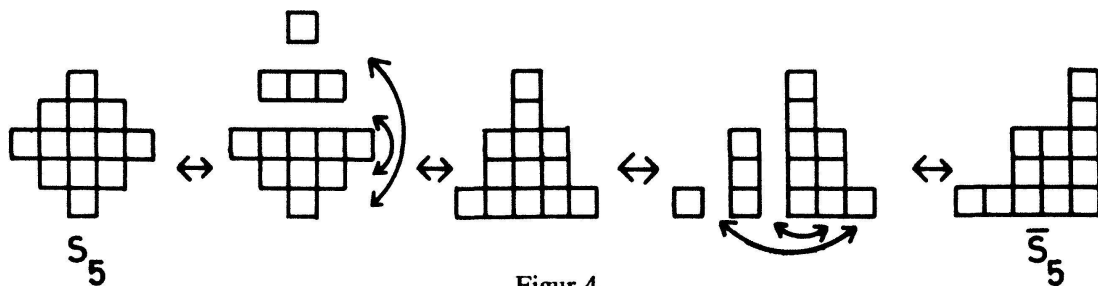
Figur 2

Damit stellt sich die Frage nach der Anzahl der erlaubten Läuferstellungen als Turmproblem für folgende Klassen von Brettern heraus:



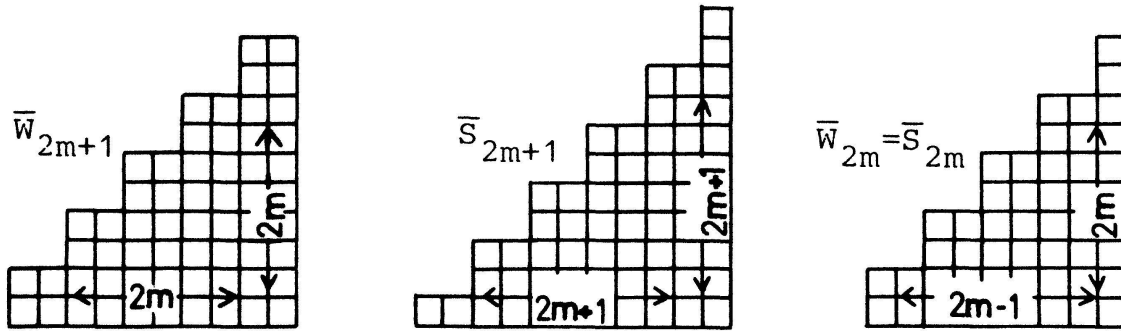
Figur 3

Wir wollen diese Bretter durch elementare Operationen in äquivalente, für unsere Zwecke jedoch besser überschaubare Bretter transformieren. Zwei Bretter heißen in diesem Zusammenhang äquivalent, wenn sie dasselbe Turmpolynom besitzen, d. h. wenn für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Anzahl der erlaubten Turmstellungen von  $k$  Türmen auf beiden dieselbe ist. Wir nennen eine Zeile (oder Spalte) Leerzeile (oder Leerspalte), wenn sie für die Platzierung eines Turmes verboten ist. Dabei betrachten wir ein verallgemeinertes Schachbrett als endliche Teilmenge der Gitterebene, den Einfluss eines Turmes nicht durch die Ränder des Brettes begrenzt. Dann lassen folgende Operationen die Anzahl der erlaubten Turmstellungen invariant, liefern also äquivalente Bretter: Vertauschen von Zeilen (oder Spalten) mit Leerzeilen (oder Leerspalten). Dies liefert z. B. für  $S_5$  das folgende äquivalente Brett  $\bar{S}_5$ :



Figur 4

Die drei Klassen aus Figur 3 lassen sich somit durch die drei folgenden Brett-Typen charakterisieren:



Figur 5

Zur Lösung des Läuferproblems sind nunmehr im wesentlichen die Turmpolynome für die Bretter  $\overline{W}_{2m+1}$ ,  $\overline{S}_{2m+1}$  und  $\overline{W}_{2m}$  zu bestimmen:

$$T(x, \overline{W}_{2m+1}) = \sum_k L'(m, k) x^k;$$

$$T(x, \overline{S}_{2m+1}) = \sum_k L''(m, k) x^k;$$

$$T(x, \overline{W}_{2m}) = T(x, \overline{S}_{2m}) = \sum_k L(m, k) x^k.$$

Die Anzahl  $A(n, k)$  aller erlaubten Läuferstellungen von  $k$  Läufern auf einem  $n \times n$ -Schachbrett ist dann gegeben durch

$$A(2m+1, k) = \sum_{t=0}^k L'(m, t) L''(m, k-t), \quad \text{falls } n = 2m+1,$$

$$A(2m, k) = \sum_{t=0}^k L(m, t) L(m, k-t), \quad \text{falls } n = 2m.$$

## 2. Bestimmung der Werte von $L'(m, k)$ , $L''(m, k)$ und $L(m, k)$

Ausgangsbasis ist das Turmpolynom eines Dreiecksbrettes  $D_p$  der Seitenlänge  $p$  (siehe Figur 6). Seine Koeffizienten lassen sich durch die Stirlingschen Zahlen 2. Art  $S(p, k)$  ausdrücken, die definiert sind durch die Rekursion

$$S(p+1, k) = S(p, k-1) + k S(p, k) \quad (1)$$

mit den Randbedingungen  $S(p, 0) = S(0, k) = 0$  für alle  $p, k \in \mathbb{N}$  sowie  $S(0, 0) = 1$  (vgl. [3]).

Explizit lassen sich diese Zahlen darstellen durch

$$S(p, k) = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^k (-1)^{k+s} \binom{k}{s} s^p. \quad (2)$$

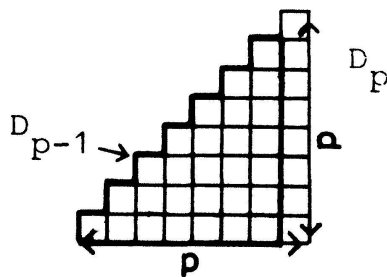
Der kombinatorische Zusammenhang zwischen Dreiecksbrettern und Stirlingschen Zahlen 2. Art manifestiert sich im folgenden

**Satz 1.** Das Turmpolynom für ein Dreiecksbrett  $D_p$  ist gegeben durch  $T(x, D_p) = \sum_k S(p + 1, p + 1 - k)x^k$  (vgl. [4], S.213).

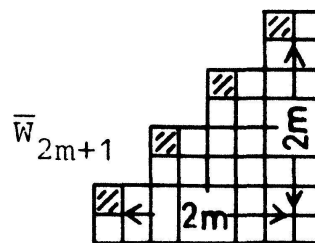
Beweis: Stehen auf dem Brett  $D_p$   $k$  Türme, so können entweder alle auf dem Brett  $D_{p-1}$  stehen oder  $k - 1$  von ihnen auf dem Brett  $D_{p-1}$  und einer auf dem Brett  $D_p \setminus D_{p-1}$ , d. h. in der rechten Spalte der Länge  $p$  (siehe Figur 6). Wird das Brett  $D_{p-1}$  von  $k - 1$  Türmen besetzt, so bleiben noch  $p - (k - 1)$  Möglichkeiten, den letzten Turm in der Spalte der Länge  $p$  zu plazieren. Bezeichnen wir mit  $D(p, k)$  die Anzahl der erlaubten Stellungen von  $k$  Türmen auf dem Brett  $D_p$ , so erhalten wir aufgrund der bisherigen Überlegungen folgende Rekursionsformel:

$$D(p, k) = D(p - 1, k) + (p - k + 1)D(p - 1, k - 1). \tag{3}$$

Randbedingungen sind  $D(p, 0) = D(1, 1) = 1$  für  $p \in \mathbb{N}$  sowie  $D(1, k) = 0$  für  $k > 2$ . Ersetzt man nun in (1)  $k$  durch  $p + 1 - k$ , so geht mit  $D(p, k) := S(p + 1, p + 1 - k)$  die Rekursion (1) in (2) über. Wegen  $S(p, p) = 1$  für alle  $p \in \mathbb{N}$ ,  $S(2, 1) = 1$  sowie  $S(2, k) = 0$  für  $k > 2$  (vgl. z.B. [3]) sind auch die obigen Randbedingungen erfüllt. q.e.d.



Figur 6



Figur 7

Mit diesen Vorbereitungen lassen sich nun die Turmpolynome der Brettclassen von Figur 5 bestimmen.

**Satz 2.** Für  $m, k \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$L'(m, k) = \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} S(2m + 1 - t, 2m + 1 - k), \tag{4}$$

$$L''(m, k) = \sum_{t=0}^m \binom{m+1}{t} S(2m + 1 - t, 2m + 1 - k), \tag{5}$$

$$L(m, k) = \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} S(2m - t, 2m - k). \tag{6}$$

**Beweis:** Betrachten wir zunächst den Brett-Typ  $\overline{W}_{2m+1}$ ! Entfernt man, wie in Figur 7 gezeigt, die gestrichelten Felder, so geht das Brett  $\overline{W}_{2m+1}$  in das Brett  $D_{2m}$  über. Es stehe jetzt ein Turm auf einem der gestrichelten Felder. Streicht man nun aus dem Brett  $D_{2m}$  die Zeile und Spalte, die von diesem Turm bedroht wird, und fügt den Rest mit dem in der Einleitung geschilderten Verfahren wieder zusammen, so geht das Brett  $D_{2m}$  in das Brett  $D_{2m-1}$  über. Dies gilt unabhängig davon, auf welchem der gestrichelten Felder der Turm positioniert ist. Stehen auf den  $m$  gestrichelten Feldern des Brettes  $\overline{W}_{2m+1}$  gerade  $t$  von  $k$  Türmen und streicht man aus  $D_{2m}$  die von diesen bedrohten Zeilen und Spalten, so erhält man das Brett  $D_{2m-t}$ . Auf  $D_{2m-t}$  lassen sich dann die restlichen  $k-t$  Türme so verteilen, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen, wobei die Türme auf den gestrichelten Feldern nicht weiter berücksichtigt werden müssen. Nach Satz 1 ist dies auf  $D(2m-t, k-t)$  Arten möglich. Auf den  $m$  gestrichelten Feldern lassen sich  $t$  Türme auf  $\binom{m}{t}$  Arten in zulässiger Weise aufstellen. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} L'(m, k) &= \sum_{t=0}^k \binom{m}{t} D(2m-t, k-t) \\ &= \sum_{t=0}^k \binom{m}{t} S(2m+1-t, 2m+1-k). \end{aligned}$$

Die Formeln für  $L''(m, k)$  und  $L(m, k)$  kann man durch analoge Überlegungen gewinnen, da durch Streichen der  $m+1$  entsprechend gestrichelten Felder das Brett  $S_{2m+1}$  in das Brett  $D_{2m}$  und durch Streichen von  $m$  entsprechenden Feldern  $\overline{W}_{2m}$  in  $D_{2m-1}$  übergeht. Es bietet sich aber auch an, den folgenden Zusammenhang zwischen den einzelnen Brett-Typen auszunutzen, den man leicht Figur 5 entnimmt.

$$L(m, k) = L'(m-1, k) + (2m-k+1)L'(m-1, k-1), \quad (7)$$

$$L'(m, k) = L(m, k) + (2m-k+1)L(m, k-1), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} L''(m, k) &= L(m, k) + (2m-k+2)L(m, k-1) \\ &= L'(m, k) + L(m, k-1). \end{aligned} \quad (9)$$

q.e.d.

Genau wie die Stirlingschen Zahlen 2. Art lassen sich auch die Zahlen  $L'(m, k)$  usw. explizit angeben.

**Satz 3.** Für  $m, k \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$L'(m, k) = \frac{1}{(2m-k)!} \sum_{s=0}^{2m-k} (-1)^{k+s} \binom{2m-k}{s} (s+1)^m (s+2)^m, \quad (10)$$

$$L''(m, k) = \frac{1}{(2m-k)!} \sum_{s=0}^{2m-k} (-1)^{k+s} \binom{2m-k}{s} (s+1)^{m-1} (s+2)^m, \quad (11)$$

$$L(m, k) = \frac{1}{(2m - k)!} \sum_{s=0}^{2m-k} (-1)^{k+s} \binom{2m-k}{s} s^m (s+1)^m. \tag{12}$$

Beweis: Wir weisen die Darstellung für  $L'(m, k)$  nach. Es sei  $j = 2m - k$ . Wegen

$$(s+1)^m (s+2)^m = \sum_{t=0}^m \sum_{r=0}^{m+t} \binom{m}{t} \binom{m+t}{r} s^r$$

erhalten wir nach (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{j!} \sum_{s=0}^j (-1)^{j+s} \binom{j}{s} (s+1)^m (s+2)^m &= \sum_{t=0}^m \sum_{r=0}^{m+t} \binom{m}{t} \binom{m+t}{r} S(r, j) \\ &= \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} S(m+t+1, j+1) = \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} S(m+t+1, 2m+1-k) \\ &= \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} S(2m+1-t, 2m+1-k) = L'(m, k). \end{aligned}$$

Hierbei wurde folgende Rekursionsformel für die Stirlingschen Zahlen 2. Art benutzt:  $S(p+1, j) = \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} S(r, j-1)$  (siehe z. B. [3]). Mit Hilfe von (8) und (9) ergeben sich dann die entsprechenden Aussagen über  $L''(m, k)$  und  $L(m, k)$ . q.e.d.

Ein Zahlenbeispiel für  $m = 2$  soll diese Überlegungen abschliessen. Es ist

$$\begin{aligned} T(x, \overline{W}_4) &= T(x, \overline{S}_4) = 1 + 8x + 14x^2 + 4x^3, \\ T(x, \overline{W}_5) &= 1 + 12x + 38x^2 + 32x^3 + 4x^4, \\ T(x, \overline{S}_5) &= 1 + 13x + 46x^2 + 46x^3 + 8x^4. \end{aligned}$$

### 3. Potenzreihen

Bekanntlich sind  $\sum_{k=0}^{\infty} S(p, k) z(z-1)\dots(z-k+1) = z^p$  für  $p \in \mathbb{N}_0$  erzeugende Funktionen der Stirlingschen Zahlen 2. Art (vgl. [3], S. 58). Entsprechendes gilt für die Zahlen des Läuferproblems.

**Satz 4.** Für die Zahlen  $L'(m, k), L''(m, k), L(m, k)$  ist bei festem  $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L'(m, k) z(z-1)\dots(z-2m+k) = z^{m+1} (1+z)^m, \tag{13}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L''(m, k) z(z-1)\dots(z-2m+k) = z^m (1+z)^{m+1}, \tag{14}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L(m, k) z(z-1)\dots(z-2m+k+1) = z^m (1+z)^m \tag{15}$$

eine erzeugende Funktion.

Beweis: Wir beschränken uns auf die Verifikation von (13).

Es ist

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} L'(m, k) z(z-1) \dots (z-2m+k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} S(2m+1-t, 2m+1-k) z(z-1) \dots (z-2m+k) \quad \text{nach (4)} \\
 &= \sum_{t=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{t} S(m+1+t, 2m+1-k) z(z-1) \dots (z-2m+k) \\
 &= \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} z^{m+1+t} \\
 &= z^{m+1} (1+z)^m \qquad \qquad \qquad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

#### 4. Ergänzende Bemerkungen

1. Streicht man in dem Brett  $\overline{W}_{2m+1}$  von Figur 5 die beiden unteren Reihen der Länge  $2m$ , so erhält man das Brett  $\overline{W}_{2m-1}$ , also ein Brett desselben Typs. Stehen  $k$  Türme auf  $\overline{W}_{2m+1}$ , so können entweder alle,  $k-1$  oder  $k-2$  sich auf  $\overline{W}_{2m-1}$  befinden, entsprechend keiner, einer oder zwei auf den beiden Zeilen der Länge  $2m$ .  $k-1$  Türme auf  $\overline{W}_{2m-1}$  erlauben es, den letzten Turm in diesen Zeilen auf  $2 \cdot 2m - (k-1)$  Feldern zu plazieren. Stehen  $k-2$  Türme auf  $\overline{W}_{2m-1}$ , so lassen sich die beiden restlichen Türme auf  $(2m - (k-2))(2m - (k-1))$  Arten auf  $\overline{W}_{2m+1} \setminus \overline{W}_{2m-1}$  positionieren. Damit genügen die Zahlen  $L'(m, k)$  folgender Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
 L'(m, k) &= L'(m-1, k) + 2(2m-k+1)L'(m-1, k-1) \\
 &\quad + (2m-k+1)(2m-k+2)L'(m-1, k-2) \quad m \geq 1, k \geq 2. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Wählt man in Übereinstimmung mit der Problemstellung als Randbedingungen  $L'(m, 0) = 1, L'(m, 1) = 2m(m+1)$  für  $m \in \mathbb{N}_0$  sowie  $L'(0, k) = 0$  für  $k \geq 2$ , so kann man zeigen, dass durch (4) bzw. (10) diese Rekursion gelöst wird. (16) ist unter algorithmischen Gesichtspunkten günstiger als (4) oder (10).  $L''(m, k)$  und  $L(m, k)$  genügen einer entsprechenden Rekursionsformel.

2. Die explizite Darstellung von  $L'(m, k)$  in (10) liefert für  $k = 2m$  bzw.  $k = 2m-1$   $L(m, 2m) = 2^m$  bzw.  $L'(m, 2m-1) = 6^m - 2^m$ , was man auch direkt aus der entsprechenden Problemstellung entnehmen kann.

3. Aus Figur 5 kann entnommen werden, dass die Anzahl der erlaubten Turmstellungen von  $k$  Türmen auf einem  $n \times n$ -Schachbrett, die bekanntlich gegeben ist durch  $T(n, k) = k! \binom{n}{k}^2$ , für  $k \geq 2, n \geq 2$  immer kleiner ist als die Anzahl der erlaubten Läuferstellungen  $A(n, k)$ . Fügt man z. B. für  $n = 2m+1$  die Bretter  $\overline{W}_{2m+1}$  und  $\overline{S}_{2m+1}$  zu einem  $n \times n$ -Schachbrett zusammen, so sind diese für das Läuferproblem separat, für das Turmproblem nicht. Beim Turmproblem bedroht eine Figur auf dem einen Teil-



brett immer auch mindestens ein Feld des anderen Teilbrettes, beim Läuferproblem jedoch nicht. Durch Plazierung einer Figur beim Turmproblem wird die Anzahl der Möglichkeiten für die restlichen Figuren stärker reduziert, als dies beim Läuferproblem der Fall ist.

4. In den Tabellen 1 und 2 sind einige der Zahlen  $L'(m, k)$  bzw.  $A(n, k)$  angegeben.

Tabelle 1. Turmpolynome  $T(x, \bar{W}_{2m+1}) = \sum_k L'(m, k)x^k$ .

$m \backslash k$	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	4	12	24	40	60	84
2	2	38	188	580	1390	2842
3	0	32	576	3840	16000	50400
4	0	4	652	12052	98292	511392
5	0	0	208	16944	322848	3047520
6	0	0	8	9080	540080	10564304
7	0	0	0	1280	412800	20453376
8	0	0	0	16	116656	20447056

Tabelle 2. Anzahl der erlaubten Läuferstellungen  $A(n, k)$  von  $k$  Läufern auf einem  $n \times n$ -Schachbrett.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	4	9	16	25	36	49	64
2	0	4	26	92	240	520	994	1736
3	0	0	26	232	1124	3896	10894	26192
4	0	0	8	260	2728	16428	70792	242856
5	0	0	0	112	3368	39680	282248	1444928
6	0	0	0	16	1960	53744	692320	5599888
7	0	0	0	0	440	38368	1022320	14082528
8	0	0	0	0	32	12944	867328	22522960

Helmut Teschke, Universität Köln

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L. Comtet: Advanced Combinatorics. Reidel, 1974.
- 2 J.F. Dillon und D.P. Roselle: Simon Newcomb's Problem. SIAM J. Appl. Math. 17, 1086-1093 (1969).
- 3 H.R. Halder und W. Heise: Einführung in die Kombinatorik. Hanser, 1976.
- 4 J. Riordan: An Introduction to Combinatorial Analysis. Wiley, 1958.
- 5 R.W. Robinson: Counting Arrangements of Bishops. In: Combinatorial Math. IV, S.198-214. Springer, 1976.