Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 39 (1984)
Heft: 1

Artikel: Eine Ramsey-Zahl für fünf Knoten und acht Kanten
Autor: Harborth, Heiko / Mengersen, Ingrid
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38011

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

5 H. Groemer: Eulersche Charakteristik, Projektionen und Quermassintegrale. Math. Ann. *198*, 23-56 (1972).
6 H. Groemer: Über einige Invarianzeigenschaften der Eulerschen Charakteristik. Comment. Math. Helv. *48*, 87-99 (1973).
7 H. Groemer: On the Euler characteristic in spaces with a separability property. Math. Ann. *211*, 315-321 (1974).
8 H. Groemer: The Euler characteristic and related functionals on convex surfaces. Geometriae dedicata *4*, 91-104 (1975).
9 H. Groemer: On the extension of additive functionals on classes of convex sets. Pacific J. Math. *75*, 397-410 (1978).
10 B. Grünbaum: Convex Polytopes. Wiley, New York 1967.
11 H. Hadwiger: Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. J. reine angew. Math. *194*, 101-110 (1955).
12 H. Hadwiger: Eine Schnittrekursion für die Eulersche Charakteristik euklidischer Polyeder mit Anwendungen innerhalb der kombinatorischen Geometrie. El. Math. *23*, 121-132 (1968).
13 H. Hadwiger: Notiz zur Eulerschen Charakteristik offener und abgeschlossener euklidischer Polyeder. Studia Sci. Math. hung. *4*, 385-387 (1969).
14 H. Hadwiger: Erweiterter Polyedersatz und Euler-Shepardsche Additionstheoreme. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg *39*, 120-129 (1973).
15 H. Hadwiger und P. Mani: On the Euler characteristic of spherical polyhedra and the Euler relation. Mathematika *19*, 139-143 (1972).
16 H. Hadwiger und P. Mani: On polyhedra with extremal Euler characteristic. J. Comb. Theory (ser. A) *17*, 345-349 (1974).
17 V. Klee: The Euler characteristic in combinatorial Geometry. Am. Math. Monthly *70*, 119-127 (1963).
18 H. Lenz: Mengenalgebra und Eulersche Charakteristik. Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg *34*, 135-147 (1970).
19 W. Nef: Beiträge zur Theorie der Polyeder, mit Anwendungen in der Computergraphik. Herbert Lang, Bern 1978.
20 W. Nef: Zur Eulerschen Charakteristik allgemeiner, insbesondere konvexer Polyeder. Result. Math. *3*, 64-69 (1980).
21 W. Nef: Zur Einführung der Eulerschen Charakteristik. Monatsh. Math. *92*, 41-46 (1981).
22 L. Schläfli: Theorie der vielfachen Kontinuität. Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 1, S. 189-191, Birkhäuser, Basel 1950.

© 1984 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/84/010001-06$1.50+0.20/0

Eine Ramsey-Zahl für fünf Knoten und acht Kanten

Als klassische Ramsey-Zahl $r(p)$ bezeichnet man die kleinste natürliche Zahl n, für die bei jeder 2-Färbung der Kanten des vollständigen Graphen mit n Knoten, K_n, ein einfarbiger Teilgraph K_p vorkommt. Es sind $r(3) = 6$ und $r(4) = 18$ wohlbekannt. Jedoch schon für $p = 5$ weiß man bisher nur $42 \leqq r(5) \leqq 55$.

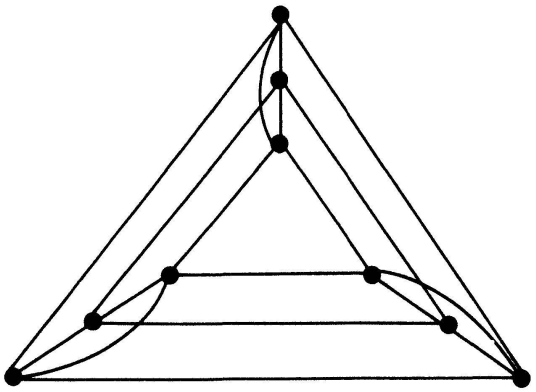
In der Literatur sind verschiedene Variationen der Ramsey-Zahlen zu finden [2, 4]. Hier sollen eine andere Abwandlung und erste Ergebnisse für $p = 5$ vorgestellt werden. Ähnliche Verallgemeinerungen wurden schon in [1, 3] behandelt.

Für $q \leqq \binom{p}{2}$ sei $r = r_q(p)$ die kleinste Anzahl von Knoten eines K_n, so daß bei jeder 2-Färbung aller Kanten des K_n ein Teilgraph mit p Knoten und q Kanten einer Farbe, kurz ein einfarbiger (p,q)-Graph, vorkommt. Natürlich ist $r_q(p) = p$ für $q \leqq \left\{\binom{p}{2}/2\right\}$. Die Werte $r_q(p)$ für $q < \binom{p}{2}$ lassen sich als eine Art Annäherung an die klassische, für $p \geqq 5$ noch unbekannte Ramsey-Zahl $r(p) = r_{\binom{p}{2}}(p)$ auffassen.

Satz: *Es gelten*

$$r_6(5) = 6, \quad r_7(5) = 10 \quad \textit{und} \quad r_8(5) = 14.$$

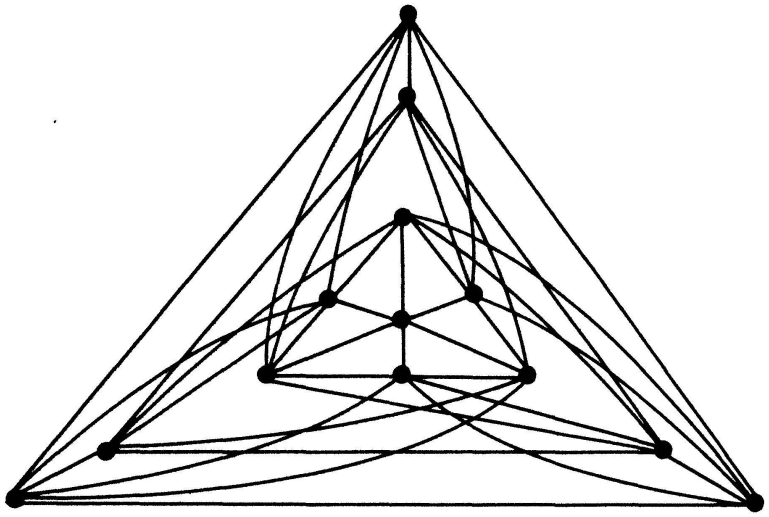
Beweis: $q = 6$: Werden 5 Kanten des K_5 grün und die übrigen 5 rot gefärbt, so kommt kein einfarbiger $(5,6)$-Graph vor, das heisst $r_6(5) > 5$.
Im K_6 sind stets $x \geqq 8$ Kanten von einer Farbe, etwa grün. Entfernt man einen Knoten, der mit der kleinsten Anzahl y grüner Kanten inzidiert, so enthält der Restgraph und damit auch der K_6 einen grünen $(5,6)$-Graph. Dies gilt für $y \leqq 2$ trivialerweise und wegen $x \geqq 3y$ auch für $y \geqq 3$. Damit ist $r_6(5) \leqq 6$ gezeigt.



Figur 1. 2-Färbung der Kanten des K_9 (nur die Kanten einer Farbe sind gezeichnet) ohne Teilgraph mit 5 Knoten und 7 Kanten einer Farbe.

$q = 7$: In Figur 1 sind je 5 der 9 Punkte durch 4, 5 oder 6 Kanten verbunden, und das bedeutet $r_7(5) > 9$.
Jeder Knoten im K_{10} inzidiert mit mindestens 5 Kanten einer Farbe, einer etwa mit 5 grünen. Sind höchstens 3 der Kanten zwischen den 5 Endknoten grün, so kommt ein roter $(5,7)$-Graph vor. Andernfalls gibt es unter den 5 Endknoten 4 mit 3 grünen Verbindungskanten und damit einen grünen $(5,7)$-Graph. Hieraus folgt $r_7(5) \leqq 10$.

$q = 8$: Je 5 der 13 Punkte in Figur 2 sind durch 3, 4, 5, 6 oder 7 Kanten verbunden, so dass $r_8(5) > 13$ gilt. Um $r_8(5) \leqq 14$ nachzuweisen, zeigen wir zunächst



Figur 2. Alle Kanten einer Farbe in einer 2-Färbung der Kanten des K_{13} ohne Teilgraph mit 5 Knoten und 8 Kanten einer Farbe.

Hilfssatz (HS): Für $n \geqq 13$ enthält jede 2-Färbung des K_n mit einfarbigem K_4 auch einen einfarbigen (5,8)-Graph.

Beweis: Es genügt, $n = 13$ zu betrachten. Zu einem etwa grünen K_4 gehen von den übrigen 9 Knoten jeweils mindestens 3, also zusammen mindestens 27 rote Kanten, oder es gibt einen grünen (5,8)-Graph. Zu zwei Knoten des grünen K_4 gehen mindestens 14 der 27 roten Kanten, so dass von jedem der beiden Knoten nur rote Kanten zu 5 der 9 Knoten gehen. Diese 5 Knoten bilden einen grünen (5,8)-Graph oder von einem Knoten gehen 2 rote Kanten zu 2 anderen der 5 Knoten, so dass diese 3 Knoten zusammen mit den 2 Knoten des grünen K_4 einen roten (5,8)-Graph bilden.
Nun inzidieren im K_{14} mit jedem Knoten mindestens 7 Kanten einer Farbe. Vom Knoten a gehen etwa x grüne Kanten zu den Knoten 1 bis x mit $x \geqq 7$. Folgende drei Fälle sind möglich: Entweder ist einer dieser x Knoten, etwa 1, mit mindestens drei der x Knoten, etwa 2, 3 und 4, grün verbunden oder mit mindestens fünf, etwa 3, 4, 5, 6 und 7, rot, oder aber von jedem der x Knoten gehen zu den anderen zwei grüne und vier rote Kanten, woraus $x = 7$ folgt.
Im ersten Fall kommt entweder ein grüner K_4 vor (s. HS) oder 2, 3 und 4 sind rot verbunden und ebenso zwei der Knoten 5, 6 und 7, etwa 5 und 6. Gehen von 5 und 6 mindestens vier rote Kanten zu den Knoten 2, 3 und 4, so bilden 2, 3, 4, 5, 6 einen roten (5,8)-Graph. Andernfalls gehen etwa von 5 grüne Kanten zu zwei der Knoten 2, 3 und 4, und diese bilden mit 5, a und 1 einen grünen (5,8)-Graph.
Im zweiten Fall gibt es entweder ein einfarbiges Dreieck mit Knoten aus $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, also mit a oder 1 einen einfarbigen K_4 (s. HS), oder die Kanten zwischen den Knoten 3 bis 7 bilden einen grünen und einen roten C_5 (Kreis der Länge 5). Gehen dann drei rote Kanten vom Knoten 2 zu drei auf dem roten C_5 aufeinanderfolgenden Knoten, so bilden diese mit 1 und 2 einen

roten (5,8)-Graph. Sonst gibt es drei unter den Knoten 3 bis 7, die mit a und 2 einen grünen (5,8)-Graph erzeugen.
Bilden im dritten Fall die grünen Kanten zwischen den $x = 7$ Knoten ein Dreieck, so gibt es einen grünen K_4 (s. HS). Also können die grünen Kanten nur noch einen C_7 bilden, ohne Einschränkung der Allgemeinheit mit den Knoten 1 bis 7 in zyklischer Reihenfolge.
Es bleibt zu betrachten, dass jeder Knoten des K_{14} mit genau sieben Kanten einer Farbe inzidiert, die Endknoten dieser Kanten einen C_7 von gleicher Farbe aufspannen und alle übrigen Kanten zwischen den Endknoten von der anderen Farbe sind.
Gehen von einem der Knoten 1 bis 7, etwa von 1, sieben rote Kanten aus, so muss zum roten C_7 die Kantenfolge (4, 6, 3, 5) gehören, die etwa durch (8, 9, 10) in rot aus den mit a rot verbundenen Knoten 8 bis 13 ergänzt werden kann. Dann bilden aber a, 1, 8, 9, 10 einen roten (5,8)-Graph.
Sonst inzidieren mit den Knoten 1 bis 7 jeweils sieben grüne Kanten, das heisst, vier davon, also insgesamt $7 \cdot 4 = 28$, auch mit den Knoten 8 bis 13. Von einem dieser sechs Knoten gehen daher fünf grüne Kanten zu dem zu a gehörenden grünen C_7. In jedem Fall werden drei aufeinanderfolgende Knoten dieses grünen C_7 erfasst, die zusammen mit 8 und a einen grünen (5,8)-Graph garantieren.
Damit ist auch $r_8(5) \leqq 14$ bewiesen.
Für $q = 9$ konnte auf ähnliche Weise bisher nur $20 \leqq r_9(5) \leqq 24$ erreicht werden.

Heiko Harborth und Ingrid Mengersen, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

1 R. Bolze und H. Harborth: The Ramsey Number $r(K_4 - x, K_5)$. In: The Theory and Applications of Graphs (editors: G. Chartrand, Y. Alavi, D. L. Goldsmith, L. Lesniak-Forster und D. R. Lick). John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1981, 109–116.
2 R. L. Graham, B. L. Rothschild und J. H. Spencer: Ramsey Theory. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto 1980.
3 U. Grenda und H. Harborth: The Ramsey Number $r(K_3, K_7 - e)$. J. Combinatorics Information Syst. Sci. 7, 166–169 (1982).
4 F. Harary: Generalized Ramsey Theory I to XIII: Achievement and Avoidance Numbers. In: The Theory and Applications of Graphs (editors: G. Chartrand, Y. Alavi, D. L. Goldsmith, L. Lesniak-Forster and D. R. Lick). John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1981, 373–390.

© 1984 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/84/010006-04$1.50+0.20/0