

Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 6

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

Kleine Mitteilungen

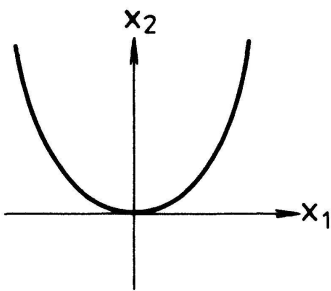
Geometrische Deutung von Krümmung und Torsion einer Raumkurve

In der Literatur findet sich wiederholt die Bemerkung, dass im Gegensatz zum Krümmungsradius ρ der Torsionsradius τ keine anschauliche geometrische Bedeutung habe. Im folgenden soll eine solche gegeben werden.

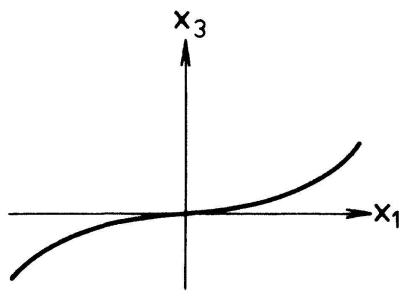
Mit der Bogenlänge s als Parameter lautet die sogenannte kanonische Darstellung einer Kurve in der Umgebung von $s = 0$ in bezug auf das begleitende Dreiein

$$x_1 = s - \frac{1}{6\rho_0^2} s^3 + \dots; \quad x_2 = \frac{1}{2\rho_0} s^2 - \frac{\rho_0'}{6\rho_0^2} s^3 + \dots; \quad x_3 = \frac{1}{6\rho_0\tau_0} s^3 + \dots,$$

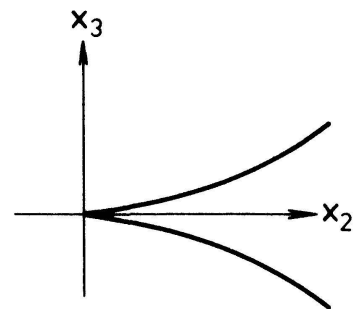
so dass also die Projektionen der Kurve in bezug auf die Ebenen des Dreiecks so aussehen (Fig. 1, 2, 3):



Figur 1



Figur 2



Figur 3

In der x_1x_2 -Ebene, der Schmiegebene, ist bis auf Grössen höherer Ordnung

$$x_1 = s, \quad x_2 = \frac{1}{2\rho_0} s^2,$$

also $x_1^2 = 2\rho_0x_2$; der Normalriss der Kurve kann also füglich durch die Schmiegeparabel $x_1^2 = 2\rho_0x_2$ ersetzt werden, deren Normalsystem sich in der Umgebung von $s = 0$ bis auf Grössen höherer Ordnung mit dem der Hauptnormalen der Kurven deckt.

In der x_2x_3 -Ebene, der Normalebene, gilt für den Normalriss bis auf Grössen höherer Ordnung

$$x_2 = \frac{1}{2\rho_0} s^2, \quad x_3 = \frac{1}{6\rho_0\tau_0} s^3,$$

also

$$(2\rho_0x_2)^3 = (6\rho_0\tau_0x_3)^2, \quad x_2^3 = \frac{9\tau_0^2}{2\rho_0} x_3^2.$$

Diese semikubische Parabel ist Evolute der Parabel

$$x_3^2 = 2p(x_2 + p) \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{x_3^2 - 2p^2}{2p}$$

mit der Gleichung

$$x_2^3 = \frac{27}{8} p x_3^2,$$

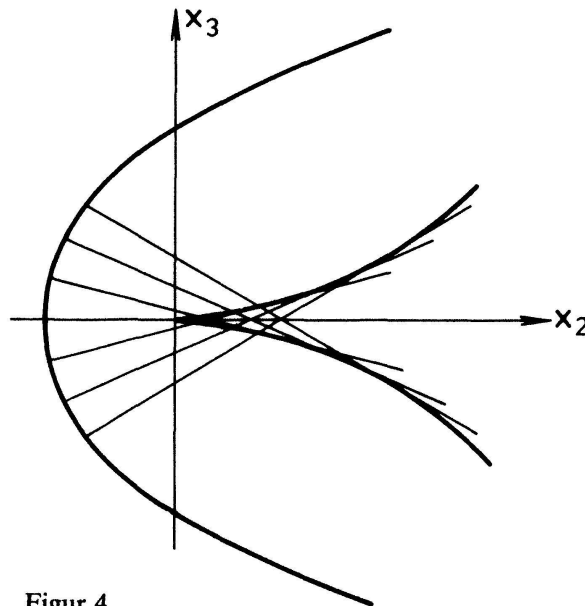
wenn

$$\frac{9\tau_0^2}{2\rho_0} = \frac{27}{8} p, \quad \text{d.h.} \quad p = \frac{4\tau_0^2}{3\rho_0}$$

gesetzt wird. Diese Parabel

$$x_3^2 = \frac{8\tau_0^2}{3\rho_0} \left(x_2 + \frac{4\tau_0^2}{3\rho_0} \right)$$

hat also ein Normalensystem, das sich in der Umgebung des Ursprungs mit den Normalrissen der Kurventangenten bis auf Grössen höherer Ordnung deckt (Fig. 4).



Figur 4

Wie die ersterwähnte *Krümmungsparabel* kann diese *Torsionsparabel* zur geometrischen Deutung der Torsion herangezogen werden, indem man statt τ den Parameter der Parabel $4\tau^2/3\rho$ als «Torsionsparameter» einführt. Krümmungs- und Torsionsparabeln erfüllen zwei Flächen, deren Studium sich lohnen dürfte.

Bekir Dizioğlu, TH Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

W. Blaschke und H. Reichardt: Einführung in die Differentialgeometrie, 2. Aufl., S. 19. Berlin, 1960.