

# Schutz eines Intervalles vor zwei Angreifern : ein einfaches Differentialspiel

Autor(en): **Thews, Klaus**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 6

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38026>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Didaktik und Elementarmathematik

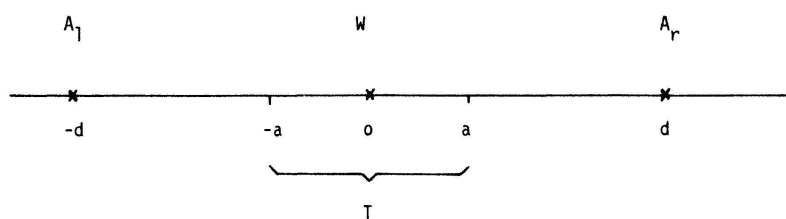
## Schutz eines Intervalles vor zwei Angreifern – ein einfaches Differentialspiel

### 1. Einleitung

Einige anschauliche Differentialspiele wie das Spiel «Verteidigung eines Ziels» ([1], Beispiel 1.9.2) oder «Zwei Verfolger und ein flüchtiges Schiff» ([1], Beispiel 6.8.3) sind elementaren Lösungsmethoden zugänglich, meist geometrischer Natur. An dieser Stelle wird ein weiteres Beispiel dieser Art vorgestellt, nämlich der Schutz eines Intervalles vor zwei Angreifern. Dies ist ein Spiel auf der reellen Achse mit drei Teilnehmern, kann aber als Zweipersonen-Spiel betrachtet werden, weil zwei Spieler eine dauernde Koalition eingehen. Gelöst wird es durch die explizite Angabe von Gewinnstrategien. Das zweidimensionale Analogon scheint zu seiner vollständigen Lösung tieferliegende Methoden aus der Theorie der Differentialspiele zu erfordern und wird als offenes Problem formuliert.

### 2. Das Problem

Ein Wächter  $W$  und zwei Angreifer, der linke  $A_l$  und der rechte  $A_r$ , bewegen sich auf der reellen Achse  $R$ . Zu Beginn des Spiels befindet sich  $W$  in  $x = 0$ ,  $A_l$  in  $x = -d$ ,  $A_r$  in  $x = d$ ,  $d > 0$ . Beide Angreifer kooperieren und setzen sich zum Ziel, dass wenigstens einer von ihnen das abgeschlossene Intervall  $T = [-a, a]$  betritt,  $0 < a < d$ . Auf der anderen Seite versucht  $W$  die Eindringlinge  $A_l$ ,  $A_r$  am Betreten der Zielmenge  $T$  zu hindern.  $W$  gewinnt das Spiel genau dann, wenn er dies schafft. Ein Angreifer scheidet



Figur 1

aus dem Spiel aus, wenn er von  $W$  berührt wird. (Im Grenzfall, wenn  $W$  und ein Angreifer gleichzeitig den Rand von  $T$  erreichen, betrachten wir dies als Fehlschlag für den betreffenden Angreifer.) Wir gehen davon aus, dass die Spieler im Verlaufe des Spiels alle momentanen Positionen kennen, ebenso sollen die maximalen Geschwindigkeiten  $v_w$  von  $W$  und  $v$  von  $A_l$  und  $A_r$  bekannt sein. In jedem Augenblick wählen die Spieler ihre Geschwindigkeiten (die die Grenzen  $v_w$  bzw.  $v$  nicht überschreiten) in Abhängigkeit von den aktuellen Positionen. Richtungswechsel der Bewegung seien verzugslos möglich.

Die Frage lautet: Wer gewinnt das Spiel und wie?

### 3. Eine mathematisch strenge Formulierung

Die Wahl der Geschwindigkeiten in jedem Moment bedarf einer Klärung. Daher wird hier eine Präzisierung vorgenommen.

Für  $\Delta t > 0$  definieren wir eine  $\Delta t$ -diskrete Version obigen Spiels wie folgt: Wir betrachten eine äquidistante Unterteilung  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$  der nichtnegativen reellen Zeitachse. In jedem Zeitpunkt  $t = k\Delta t, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  wählen die Spieler eine zulässige Geschwindigkeit, die in  $[k\Delta t, (k+1)\Delta t)$  konstant ist und von den Orten  $x_w, x_r$  und  $x_l$  von  $W, A_r$  und  $A_l$  bei  $t = k\Delta t$  abhängt. Dadurch ist die Bewegung eindeutig bestimmt. Wir sagen,  $W$  berührt  $A_j$  und fängt ihn damit, wenn  $|x_w - x_j| \leq 2v_w\Delta t, j \in \{l, r\}$ . (Diese etwas willkürlich erscheinende Definition ist in Verbindung mit der getroffenen Konvention zu sehen, ein Angreifer müsse zum Erfolg das Ziel  $T$  strikt vor  $W$  erreichen.)  
Betreffend das ursprüngliche Spiel definieren wir:  $W$  bzw.  $A_l, A_r$  gewinnt das Spiel, wenn  $W$  bzw.  $A_l, A_r$  das  $\Delta t$ -diskrete Spiel für alle hinreichend kleinen  $\Delta t$  gewinnt.

### 4. Das Ergebnis

$$\text{Sei } e = 2d/(v_w - v) + a/v_w - (d - a)/v. \quad (1)$$

Ist  $e > 0$ , dann gewinnen  $A_l$  und  $A_r$  das Spiel, ist  $e \leq 0$ , so hat  $W$  eine Gewinnstrategie. Wie in 5.1 ausgeführt wird, kann  $e$  interpretiert werden z. B. als Zeitvorsprung von  $A_r$  vor  $W$  beim Erreichen von  $x = a$ , wenn  $W$  zunächst  $A_l$  fängt und dann  $x = a$  ansteuert.

### 5. Beweis

#### 5.1 Der Fall $e \leq 0$

Die einfache Gewinnstrategie für  $W$  besteht darin, zunächst einen beliebigen Angreifer zu fangen und dann den anderen.

Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass alle Spieler ihre Maximalgeschwindigkeiten nutzen. Wenn  $W$   $A_l$  folgt und  $A_l$  sich nach links bewegt, dann ist die Zeit, erforderlich um  $A_l$  zu fangen, umzukehren und  $x = a$  zu erreichen  $t = 2d/(v_w - v) + a/v_w$ . Die Bedingung  $e \leq 0$  impliziert dann, dass  $W$   $x = a$  wenigstens gleichzeitig mit  $A_r$  erreicht, wenn  $A_r$  von Anfang an nach links läuft.

Anmerkung: Das Resultat 4 besagt daher, dass  $W$  genau dann gewinnen kann, wenn seine aggressive Strategie Erfolg hat.

#### 5.2 Der Fall $e > 0$

Wir werden eine Gewinnstrategie für  $A_l$  und  $A_r$  angeben. Zunächst sind einige Definitionen angebracht.

Zu jedem Zeitpunkt des Spiels sei  $T_l(T_r)$  der Zeitvorsprung von  $A_r(A_l)$  beim Erreichen von  $x = a$  ( $x = -a$ ), vorausgesetzt  $W$  fängt  $A_l(A_r)$  und bewegt sich dann nach  $x = a$  ( $x = -a$ ).  $A_l$  und  $A_r$  bewegen sich dabei nach links (rechts), alle mit höchstem Tempo. Es gelten die Beziehungen

$$T_l = 2(x_w - x_l)/(v_w - v) + (a - x_w)/v_w - (x_r - a)/v, \quad (2)$$

und

$$T_r = 2(x_r - x_w)/(v_w - v) + (x_w + a)/v_w + (a + x_l)/v. \quad (3)$$

Sei ferner  $V_r(V_l)$  der Zeitvorsprung von  $W$  vor  $A_r(A_l)$  beim Erreichen von  $x = a$  ( $x = -a$ ), vorausgesetzt beide laufen auf diese Stelle zu. Offensichtlich gelten die Formeln

$$V_r = (x_r - a)/v - (a - x_w)/v_w, \quad (4)$$

und

$$V_l = (-a - x_l)/v - (x_w + a)/v_w. \quad (5)$$

Definiere  $\alpha$  wie folgt: Für  $v_w \leq 3v$  sei  $\alpha = 2(a/v_w + a/v)$  und sonst  $\alpha = 2e$ .

Wir argumentieren im Rahmen eines  $\Delta t$ -diskreten Spiels.  $\Delta t$  ist dabei als klein vorausgesetzt, genauere Forderungen werden im Beweis deutlich. Wähle  $\varepsilon > 0$  mit  $\alpha > 3\varepsilon$ . Folgende Strategie wird sich als Gewinnstrategie für die Angreifer erweisen:  $A_l$  und  $A_r$  nutzen ständig die Höchstgeschwindigkeit  $v$ .

- i) Ist  $V_r < 0$  ( $V_l < 0$ ), dann läuft  $A_r(A_l)$  direkt aufs Ziel zu. Im Falle, dass noch beide Angreifer im Spiel sind und  $V_l, V_r \geq 0$  gilt, werden folgende Vorschriften beachtet:
- ii) Falls  $\min\{T_l, T_r\} > \varepsilon$ , bewegen sich  $A_l$  und  $A_r$  aufs Ziel zu.
- iii) Falls  $T_r \leq \varepsilon$  ( $T_l \leq \varepsilon$ ), so bewegen sich  $A_r$  und  $A_l$  nach rechts (links).

Anmerkung: Im wesentlichen legen diese Regeln eine Kontraktionsstrategie fest, die die Nebenbedingung respektiert, dass das sukzessive Einfangen der Angreifer durch  $W$  nicht möglich ist. Der Abstand  $|x_r - x_l|$  ist eine nichtwachsende Funktion der Zeit. Jetzt zeigen wir, dass obige Strategie erfolgreich ist. Lemma 1 erklärt die Bedeutung von  $\alpha$  und impliziert, dass im Falle iii nur entweder  $T_r < \varepsilon$  oder  $T_l < \varepsilon$  gilt. Im weiteren Beweis nehmen wir immer an,  $A_l$  und  $A_r$  verwenden die erläuterte Kontraktionsstrategie.

**Lemma 1.** *Solange beide Angreifer aktiv sind, gilt die Ungleichung*

$$T_r + T_l \geq \alpha.$$

Dies bedeutet, dass die Summe der Vorsprünge des linken und rechten Angreifers immer positiv erhalten bleibt.

**Beweis:** a)  $v_w \leq 3v$ : Daraus folgt  $(v_w - v) \leq 2v$  und  $1/2v \leq 1/(v_w - v)$ . Daher erhält man

$$\begin{aligned} T_l + T_r &= 2(x_r - x_l)/(v_w - v) + 2a/v_w + 2a/v + (x_l - v_r)/v \\ &\geq 2(x_r - x_l)/2v + 2a/v_w + 2a/v + (x_l - x_r)/v \\ &\geq 2a/v_w + 2a/v. \end{aligned}$$

b)  $v_w > 3v$ : In diesem Fall betrachten wir  $T_l + T_r$  als Funktion der Zeit, wobei wir wissen, dass  $T_l(0) + T_r(0) = 2e > 0$  gilt. Sei  $t = k\Delta t$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Dann haben  $W$ ,  $A_l$  und  $A_r$  konstante Geschwindigkeiten  $w$ ,  $v_l$  und  $v_r$  im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t)$ . Folglich gilt

$$T_l(t + \Delta t) + T_r(t + \Delta t) = T_l(t) + T_r(t) + \Delta t(2v_r(v_w - v) + v_l/v - 2v_l/(v_w - v) - v_r/v). \quad (6)$$

Gilt  $v_l = v_r$  (entspricht Fall iii), dann bleibt  $T_l + T_r$  konstant. Andernfalls (Fall ii) gilt  $v_l = v$  und  $v_r = -v$  und der Klammerausdruck in (6) wird zu  $2 - 4v/(v_w - v) \geq 2 - 4v/2v = 0$ . Deshalb ist  $T_l + T_r$  eine nichtfallende Funktion und  $T_l + T_r \geq 2e$ .

Das nächste Lemma zeigt, dass die Strategie des sukzessiven Einfangens für  $W$  keinen Erfolg verspricht.

**Lemma 2.** *Solange beide Angreifer im Spiel sind, gilt die Relation*

$$\min\{T_l, T_r\} \geq \varepsilon/2.$$

**Beweis:** Sei  $t = k\Delta t$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und seien  $w, v_l, v_r$  die konstanten Geschwindigkeiten von  $W, A_l$  und  $A_r$  in  $[t, t + \Delta t)$ . Wir argumentieren am Beispiel von  $T_l$ , für  $T_r$  gilt die analoge Beweisführung.

$$T_l(t + \Delta t) = T_l(t) + \Delta t(2w/(v_w - v) - w/v_w - 2v_l/(v_w - v) - v_r/v) = T_l(t) + \Delta t(2(w - v_l)/(v_w - v) - w/v_w - v_r/v). \quad (7)$$

Man beachte, dass der Multiplikand von  $\Delta t$  in (7) als Funktion von  $w$  wachsend ist.

Ist  $T_l(t) > \varepsilon$ , dann gilt  $v_l = v$ ,  $v_r = -v$  und somit

$$T_l(t + \Delta t) \geq \varepsilon + \Delta t(2(-v_w - v)/(v_w - v) + 2) \text{ sowie}$$

$$T_l(t + \Delta t) \geq \varepsilon - \Delta t 4v/(v_w - v). \text{ Da } \Delta t \text{ als klein vorausgesetzt wurde, folgt}$$

$$T_l(t + \Delta t) \geq \varepsilon/2. \text{ Sei nun } \varepsilon > T_l(t) \geq \varepsilon/2. \text{ Dann liegt Fall iii vor und } v_l = -v, v_r = -v.$$

$$\text{Es folgt } T_l(t + \Delta t) \geq T_l(t) + \Delta t(2(-v_w + v)/(v_w - v) + 2)$$

$$\text{und } T_l(t + \Delta t) \geq T_l(t) \geq \varepsilon/2.$$

Nach diesen Vorbereitungen schliessen wir wie folgt. Fängt  $W$  einen Angreifer im Verlaufe des Spiels, z. B.  $A_r$ , dann ist nach Lemma 2  $T_r$  positiv. In diesem Augenblick des Fangens gilt jedoch  $T_r = -V_l$  (vgl. Formeln (3) und (5)) und deshalb wird  $A_l$   $x = -a$  vor  $W$  erreichen.

Es verbleibt die Aufgabe, eine obere Schranke für die Dauer der Spielphase herzuleiten, in der noch beide Angreifer da sind. Sei  $S$  die Gesamtzeit seit Spielbeginn, für die

$$\min\{T_r, T_l\} > \varepsilon \text{ gilt. Genauer sei für } t_k = k\Delta t \text{ } S(t_k) = \left( \sum_{j=0}^{k-1} f(j) \right) \Delta t, \text{ wobei } f(j) = 1, \text{ falls}$$

$$\min\{T_r(j\Delta t), T_l(j\Delta t)\} > \varepsilon \text{ und } f(j) = 0 \text{ sonst.}$$

Da der Abstand der Eindringlinge  $|x_l - x_r|$  mit Geschwindigkeit  $2v$  schrumpft, solange  $\min\{T_r(t), T_l(t)\} > \varepsilon$  gilt, kann  $S$  nicht die Schranke  $S_B = (d - a)/v$  überschreiten. Andernfalls wäre  $|x_l - x_r| < 2a$ , und das Spiel hätte vorher geendet.

Seien  $\tau_1 = 2(d - a)/v$  und  $\tau_2 = (\alpha - 3\varepsilon)(v_w - v)/4v$ . Es folgt

**Lemma 3.** *Wenn beide Angreifer im Spiel sind, kann die Spieldauer die Schranke  $\tau_B = (S_B/\tau_2 + 2)\tau_1$  nicht übersteigen.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass zur Zeit  $\tau_B$   $S \geq S_B$  gilt.

Da  $|x_l - x_r|$  nicht wächst, ist  $\tau_1$  die maximale Zeit, die ein Angreifer braucht, um das Ziel  $T$  zu erreichen, wenn er darauf zu läuft. Sei  $t = k\Delta t$  irgendein Zeitpunkt, zu dem  $\min\{T_l, T_r\} \leq \varepsilon$  (ein solcher wird spätestens bei  $\tau_1$  erreicht). Dann gibt es innerhalb des Intervalles  $(t, t + \tau_1)$  eine Gesamtzeit von  $\tau_2$ , in der  $\min\{T_l, T_r\} > \varepsilon$  gilt und somit der Abstand  $|x_l - x_r|$  schrumpft. Dies sieht man wie folgt: Sei o. E.  $T_l \leq \varepsilon$  zur Zeit  $t$ . Beide Angreifer bewegen sich dann nach links. Da  $A_r$  höchstens die Zeit  $\tau_1$  braucht, um  $x = a$  zu erreichen, muss  $W$  die Grösse  $T_r$  auf  $\varepsilon$  erniedrigen innerhalb von  $(t, t + \tau_1)$  (für  $T_r \leq \varepsilon$  läuft ja  $A_r$  nach rechts), wenn das Spiel nicht bis  $t + \tau_1$  verlorengehen soll. Die Zeit, die nötig ist, um  $T_r$  von  $\alpha - 5\varepsilon/4$  bis auf  $5\varepsilon/4$  herabzusetzen, beträgt mindestens  $\tau_2$ , weil  $4v/(v_w - v)$  die maximale Abnahmerate von  $T_r$  ist, die  $W$  in der Kontraktionsphase erreichen kann. Da nach Lemma 1  $T_l + T_r \geq \alpha$  bleibt, haben wir  $\min\{T_l, T_r\} > \varepsilon$  während dieser Zeit.

Die Wiederholung des obigen Arguments liefert Lemma 3. Lemma 3 wiederum vervollständigt den Beweis.

## 6. Bemerkungen

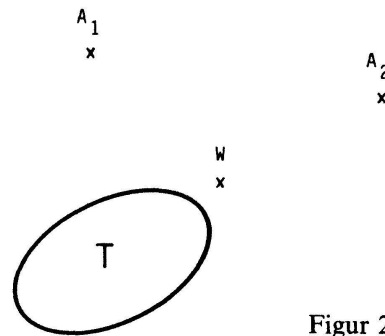
6.1 Die im Beweis von Lemma 1 getroffene Fallunterscheidung  $v_w > 3v$  bzw.  $v_w \leq 3v$  ist nicht zufällig. Im ersten Fall hängen die Gewinnaussichten für  $W$  von der Entfernung  $d$  der Angreifer vom Ursprung ab. Ist  $d$  gross, dann kann  $W$  gewinnen, unterschreitet  $d$  den Schwellwert  $d^* = (a/v_w + a/v)v(v_w - v)/(v_w - 3v)$ , so gewinnen  $A_l$  und  $A_r$ . Im zweiten Fall dagegen hat  $W$  bei richtigem Verhalten seiner Kontrahenten keine Gewinnchance.

6.2. Im Falle  $e > 0$  kann man die qualitative Frage nach Sieg oder Niederlage durch die quantitative Frage ersetzen, wie  $A_l, A_r$  ihr Ziel möglichst schnell erreichen, wenn andererseits  $W$  das Spielende möglichst lange hinauszögern will. Zwei Andeutungen mögen zu diesem Thema genügen. Aus Lemma 3 folgt, dass die Spieldauer den Wert  $\tau = \tau_B + \tau_1$  nicht überschreitet, wenn die Angreifer die angegebene Strategie verfolgen. Beachtenswert ist, dass im Falle  $v_w > 3v$  die Garantieschranke  $\tau$  gegen Unendlich geht, wenn  $d$  sich von unten  $d^*$  nähert und damit  $e$  gegen Null geht. Dem Leser sei es überlassen, sich zu überlegen, dass tatsächlich die von  $W$  erzwingbare Spieldauer gegen Unendlich geht, wenn der Vorsprung  $e$  der Angreifer gegen Null geht.

## 7. Ein offenes Problem

Man löse das zweidimensionale Analogon, wobei die Spieler sich in der Ebene bewegen und  $T$  ein abgeschlossenes, beschränktes und konvexes Gebiet ist.

Es erscheint plausibel, dass die lineare Lösung gültig ist, vorausgesetzt, die Spieler befinden sich anfänglich auf der Geraden durch einen Durchmesser von  $T$ . Dies deutet



Figur 2

an, dass das Problem beträchtlich komplizierter sein wird als die entsprechende Zwei-Spieler-Version ([1], Beispiel 1.9.2. Für eine strenge Lösung vergleiche man [2]). Darüber hinaus dürfte auch das sukzessive Einfangen der Angreifer im Falle, dass  $W$  gewinnt, dann nicht ganz einfach sein, wenn diese zu Beginn nahe beieinander sind. Dies wird nahegelegt durch das Spiel «Point capture of two evaders in succession» [3].

Klaus Thews, Unterhaching

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 R. Isaacs: Differential Games. Wiley, New York 1965.
- 2 A. Friedman: Differential Games. Wiley, New York 1971.
- 3 J. V. Breakwell und P. Hagedorn: Point capture of two evaders in succession. J. Optim. Theory Applic. 27/1 (1979).

© 1984 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/84/060149-06\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 902.** Give a proof for the following generalisation of Aufgabe 890: Let  $h_i$  and  $m_i$  ( $i = 0, \dots, n; n \geq 3$ ) be the heights and the medians of an  $n$ -dimensional simplex, respectively, and let  $V$  be its volume. Then

$$V^{-1} \left( \sum_{i=0}^n h_i \right) \left( \sum_{i=0}^n m_i^{n-1} \right) \geq n! (n+1)^{(n+3)/2} n^{-n/2}$$

with equality if and only if the simplex is regular.

M. S. Klamkin, Edmonton, Canada

Solution by the proposer: We use the following known results:

$$\sum_{i=0}^n m_i^{n-1} / (n+1) \geq \left( \sum_{i=0}^n m_i^2 / (n+1) \right)^{(n-1)/2}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^n m_i^2 = (n+1) n^{-2} \sum_{i < j} a_{ij}^2 \quad (2)$$