

# A remark on buffon's needle problem

Autor(en): **Abel, Ulrich**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38015>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## A Remark on Buffon's Needle Problem

Let  $G_n$  be a grid in the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  with coordinates  $x_1, x_2, \dots, x_n$  determined by hyperplanes parallel to the hyperplanes with the equation  $x_i = 0$  separated by a distance of  $2L$ .

In his generalization of Buffon's Needle Problem to  $n$  dimensions Stoka [2] gives an expression for the probability that a segment  $\omega$  of length  $L$  which will be "thrown" in a random fashion into the  $\mathbb{R}^n$  cuts the grid  $G_n$ .

Let  $A_j$  be the event: the segment  $\omega$  cuts a hyperplane of  $G_n$  parallel to the hyperplane with the equation  $x_j = 0$ . In [2] and [3] Stoka shows that the probability for the event  $A_j$  is

$$P(A_j) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

(formula (9) in [3] is a misprint) and finds for the estimator

$$\hat{P}_n = \frac{1}{nN} \sum_{j=1}^n (\text{number of times } A_j \text{ occurs in } N \text{ independent trials})$$

of  $P(A_j)$  the variance

$$D^2(\hat{P}_n) = \frac{1}{nN} \theta_n \tag{2}$$

with

$$\begin{aligned} \theta_n = & \frac{(2n-1) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi}} - \frac{n \left[ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^2}{(n-1)^2 \left[ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right]^2 \pi} - n + 1 \\ & + \frac{2^{n-2} (n-1) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{3/2} (n-2)!} \left[ \left( \pi + \frac{1}{2n} \right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) - \frac{2\sqrt{\pi}}{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

([3], formula (15)). On the other hand he calculates for the estimator  $\hat{P}_1 = M^{-1}$  (number of times  $A_1$  occurs in  $M$  independent trials) of  $P(A_j)$  the variance

$$D^2(\hat{P}_1) = \frac{1}{M} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \left[ 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi}} \right] \tag{3}$$

([3], formula (16)). For the case  $n = 2$  compare Schuster [1]. If we set both variances (2) and (3) equal we receive

$$M = \sigma(n) n N \tag{4}$$

with

$$\sigma(n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left[ (n-1) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi} - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]}{(n-1)^2 \left[ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right]^2 \pi \theta_n} \tag{5}$$

Thus,  $N$  independent trials in  $G_n$  give the same information about the probability (1) as  $\sigma(n) n N$  independent trials in a grid determined by hyperplanes parallel to the hyperplane with the equation  $x_1 = 0$ . Schuster [1] finds  $\sigma(2) \approx 1.1114$ . Stoka [3] calculates  $\sigma(3) \approx 1.1121$  and  $\sigma(4) \approx 1.1039$  and conjectures that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = 1$ . In this note we give an asymptotic expression for  $\sigma(n)$  and show that Stoka's conjecture is true.

**Theorem.** *It holds*

$$\sigma(n) = \frac{\pi n! - 2^{n-2} n \left[ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^2}{\pi n! - 2^{n-2} n^2 \left[ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^2 + 2^{n-3} (n-1)^3 \left[ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right]^2}, \tag{6}$$

$$\sigma(n) \cong \frac{\sqrt{2\pi} - n^{-1/2} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n-1} e^2}{\sqrt{2\pi} - n^{1/2} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n-1} e^2 + n^{1/2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n-2} e^3} \quad (n \rightarrow \infty) \tag{7}$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = 1. \tag{8}$$

**Proof:** First we simplify the expression (5). For abbreviation we set

$a = a_n = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$  and  $b = b_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ . Then by (5)

$$\sigma(n) = \frac{(n-1) \sqrt{\pi} a b - b^2}{(n-1)^2 \pi \left\{ \frac{(2n-1) a b}{(n-1) \sqrt{\pi}} - \frac{n b^2}{(n-1)^2 \pi} - (n-1) a^2 + \right.}$$

$$\left. + \frac{2^{n-2} (n-1) \left(\pi + \frac{1}{2n}\right) a^3 b}{\pi^{3/2} (n-2)!} - \frac{2^{n-1} a^2 b^2}{\pi (n-2)!} \right\}}.$$

The formula

$$\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x)$$

gives us

$$ab = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-2}} (n-2)!$$

and therefore

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{2^{-(n-2)} \pi (n-1)! - b^2}{2^{-(n-2)} \pi (n-1)! (2n-1) - nb^2 + \frac{(n-1)^3}{2n} a^2 - 2^{-(n-3)} \pi (n-1)! (n-1)} \\ &= \frac{\pi n! - 2^{n-2} n b^2}{\pi n! - 2^{n-2} n^2 b^2 + 2^{n-3} (n-1)^3 a^2} \end{aligned}$$

which is (6).

By Stirling's formula for the Gamma-function it holds

$$\log \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + c + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

with

$$c = \frac{1}{2} \log(2\pi).$$

This implies

$$\begin{aligned} \sigma(n) &\cong \frac{\pi n^{n+1/2} e^{-n+c} - 2^{n-2} n \left(\frac{n-2}{2}\right)^{n-1} e^{-(n-2)+2c}}{\pi n^{n+1/2} e^{-n+c} - 2^{n-2} n^2 \left(\frac{n-2}{2}\right)^{n-1} e^{-(n-2)+2c} + 2^{n-3} (n-1)^3 \left(\frac{n-3}{2}\right)^{n-2} e^{-(n-3)+2c}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} - n^{-1/2} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n-1} e^2}{\sqrt{2\pi} - n^{1/2} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n-1} e^2 + n^{1/2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n-2} e^3} \end{aligned}$$

which is (7).

Evidently the numerator of (7) converges to  $\sqrt{2\pi}$  for  $n \rightarrow \infty$ . It is sufficient to show that

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \left[ \left( \frac{n-2}{n} \right)^{n-1} - \left( \frac{n-1}{n} \right)^3 \left( \frac{n-3}{n} \right)^{n-2} e \right] = 0.$$

Now

$$|d| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \left( \frac{n-1}{n} \right)^3 \left( \frac{n-3}{n} \right)^{n-2} \cdot \left\{ \left| \left( \frac{n}{n-1} \right)^3 \left( \frac{n-2}{n} \right) - 1 \right| \left( \frac{n-2}{n-3} \right)^{n-2} + \left| \left( \frac{n-2}{n-3} \right)^{n-2} - e \right| \right\}.$$

Because of

$$\left( \frac{n}{n-1} \right)^3 \frac{n-2}{n} - 1 = 0 \left( \frac{1}{n} \right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

it remains to show that

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = e + 0 \left( \frac{1}{n} \right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

To see this we set  $x_i = i/n$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) and Taylor's formula gives us

$$e^{x_i} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right) e^{x_{i-1}} + \frac{1}{2n^2} e^{\xi_i} \quad \text{with} \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

This implies

$$\begin{aligned} e = e^{x_n} &= \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n e^{x_0} + \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n-i} e^{\xi_i} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n + 0 \left( \frac{1}{n} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Thus the Theorem is proved.

Ulrich Abel

Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Universität, Giessen

#### REFERENCES

- 1 E. F. Schuster: Buffon's needle experiment. *Am. Math. Monthly* 81, 26–29 (1974).
- 2 M. I. Stoka: Une extension du problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien  $R^n$ . *Boll. U.M.I. (IV)* 10, 386–389 (1974).
- 3 M. I. Stoka: Quelques considérations concernant le problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien  $E_n$ . *El. Math.* 38, 4–11 (1983).