Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 39 (1984)
Heft: 2

Artikel: Zum Fundamentalsatz der Algebra
Autor: Hering, Hermann
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38016

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zum Fundamentalsatz der Algebra

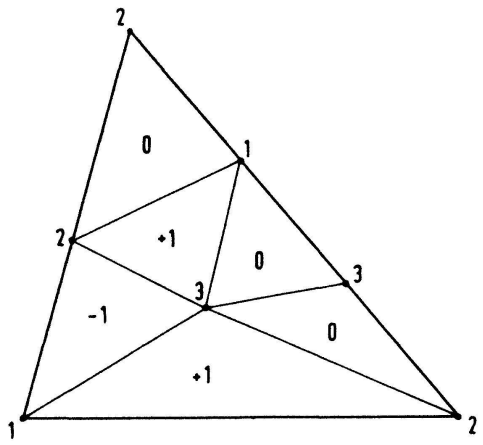
Bewiesen wird (wieder einmal):

Jede ganz-rationale Funktion f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad n \geqq 1,$$

hat mindestens eine Nullstelle.

Der hier vorgestellte Beweis [1]) basiert auf einem kombinatorischen Hilfssatz, für dessen Formulierung einige Bemerkungen erforderlich sind.
Ein Dreieck Δ_0 sei in Teildreiecke Δ zerlegt, [2]) und alle Ecken seien mit einer der Ziffern 1, 2, 3 signiert. Ein Teildreieck mit paarweise verschiedenen Eckensignierungen heisst vollständig signiert.
Alle Teildreiecke seien im Sinne der (positiven) Orientierung der Ebene gleich orientiert. Dies induziert eine Orientierung der Teildreieckseiten und damit auch des Randes von Δ_0.



Figur 1

Definiert man Bewertungen für orientierte Teildreiecke Δ:

$$\alpha(\Delta) = \begin{cases} +1 & \text{für das Signierungstripel } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{für das Signierungstripel } (1, 3, 2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und orientierte Teildreieckseiten s:

$$\alpha(s) = \begin{cases} +1 & \text{für das Signierungspaar } (1, 2) \\ -1 & \text{für das Signierungspaar } (2, 1) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

1) Nach einem am 5. 3. 1981 auf der Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Darmstadt gehaltenen Kurzvortrag. Andere Zugänge auf kombinatorischer Basis findet man in [1], [2].
2) Die Vereinigung der Teildreiecke ist das Dreieck, und je zwei Teildreiecke haben entweder keinen Punkt oder eine Ecke oder eine Seite gemeinsam.

so gilt der folgende

Hilfssatz:[3]) *In jedem in Teildreiecke Δ zerlegten Dreieck Δ_0 sind die Summen der Bewertungen der Teildreiecke und der Bewertungen aller Teildreieckseiten auf dem Rand von Δ_0 gleich:*

$$\sum_{\Delta \subset \Delta_0} \alpha(\Delta) = \sum_{s \subset \operatorname{Rand} \Delta_0} \alpha(s) .$$

Beweis: Genau die Teildreiecke mit (1, 2, 3) oder (1, 3, 2) haben genau eine Seite mit (1, 2) oder (2, 1). Umläuft man alle Teildreiecke bei positiver Orientierung und addiert die $\alpha(s)$, so erhält man

$$\sum \alpha(s) = \sum_{s \subset \operatorname{Rand} \Delta_0} \alpha(s).$$

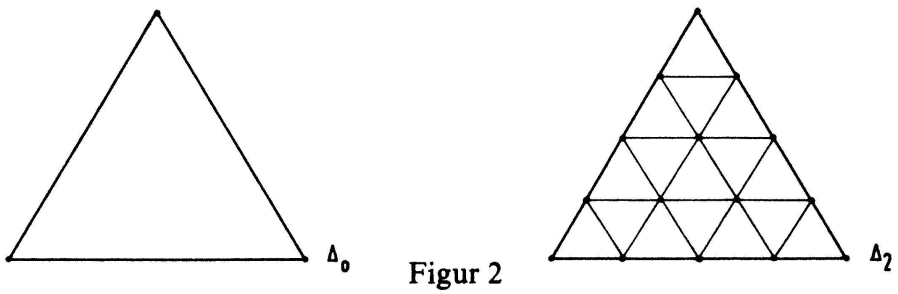
Die Summe der Teilsummen je Teildreieck Δ ist $\sum \alpha(\Delta)$.

Folgerung: Ist $\sum \neq 0$, so gibt es mindestens $|\sum|$ vollständig signierte Teildreiecke, d. h. $|\sum|$ mehr von der einen als von der anderen Sorte (vgl. Fig. 1).

Beweis des Fundamentalsatzes: Mit der Annahme $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ läßt sich eine Signierung der $z \in \mathbb{C}$ definieren ($0 \leqq \arg w < 2\pi$):

$$m(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leqq \arg f(z) < \frac{2}{3}\pi \\ 2, & \text{falls } \frac{2}{3}\pi \leqq \arg f(z) < \frac{4}{3}\pi \\ 3, & \text{falls } \frac{4}{3}\pi \leqq \arg f(z) < 2\pi . \end{cases}$$

Sei Δ_0 ein gleichseitiges Dreieck in der komplexen Ebene, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, mit Inkreisradius r, über den später verfügt wird. Mit Hilfe der Mittelparallelen wird rekursiv eine Zerlegungsfolge von Δ_0 mit kongruenten Teildreiecken konstruiert: $\langle \Delta_k \rangle$ (vgl. Fig. 2).



Figur 2

Wie im folgenden gezeigt wird, gibt es einen Index k_0 (abhängig von der Funktion f und r), so daß für alle Zerlegungen mit $k \geqq k_0$ vollständig signierte Teildreiecke existieren.
Damit lassen sich drei Eckpunkt-Folgen je gleicher Signierung definieren:

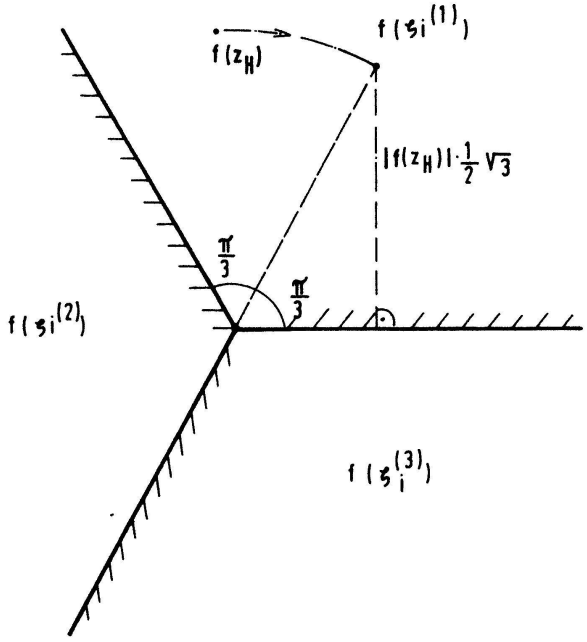
$$\langle z_i^{(m)} \rangle , \quad m = 1, 2, 3 .$$

3) Dies ist eine verschärfende Verallgemeinerung des Spernerschen Lemmas: $\sum_{s \subset \operatorname{Rand} \Delta_0} \alpha(s) = 1$.

Da die $\langle z_i^{(j)} - z_i^{(p)} \rangle$, $j \neq p$, nach Konstruktion Nullfolgen sind, haben die $\langle z_i^{(m)} \rangle$ einen gemeinsamen Häufungspunkt $z_H \in \Delta_0$. Daher gibt es drei Teilfolgen $\langle \zeta_i^{(m)} \rangle$ der $\langle z_i^{(m)} \rangle$, die gegen z_H konvergieren. Genau eine hat dieselbe Signierung wie z_H. Dann konvergiert mindestens eine der beiden anderen Funktionswertfolgen $\langle f(\zeta_i^{(m)}) \rangle$ – ihre Signierung sei m^* – nicht gegen $f(z_H) \neq 0$, da für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f(\zeta_i^{(m^*)}) - f(z_H)| \geqq |f(z_H)| \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} > 0$$

(vgl. Fig. 3) [4]), und wir haben einen Widerspruch zur Stetigkeit von f in z_H.
Es bleibt zu zeigen, dass für jedes $k \geqq k_0$ vollständig signierte Teildreiecke existieren.



Figur 3. Hier ist $\frac{\pi}{3} \leqq \arg f(z_H) < \frac{2\pi}{3}$, $m(z_H) = 1$, $m^* = 3$.

Die Argumente von f und der Vergleichsfunktion f^* mit $f^*(z) = z^n$ unterscheiden sich für alle z mit «grossen» Beträgen nur «wenig». Daher wird zunächst $\sum_{s \subset \operatorname{Rand} \Delta_0} \alpha^*(s)$ bezüglich f^* berechnet und daraus $\sum_{s \subset \operatorname{Rand} \Delta_0} \alpha(s)$ bezüglich f gewonnen.
Nun präzisieren wir. Die Zerlegung aller (mod 2π reduzierten) $\arg f^*(z)$, $z \neq 0$:

$$(m-1) \cdot \frac{2\pi}{3} \leqq \arg f^*(z) = \arg z^n < m \cdot \frac{2\pi}{3}, \qquad m = 1, 2, 3, \tag{1}$$

4) Dies lässt sich mit einigem rechnerischen Aufwand auch rein analytisch zeigen.

legt für die zugehörigen $\arg z$ die folgende Zerlegung nahe:

$$(j-1)\cdot\frac{2\pi}{3n} \leqq \arg z < j\cdot\frac{2\pi}{3n}, \qquad 1 \leqq j \leqq 3n. \tag{2}$$

Dann gilt für jede Signierungsziffer m:

$$\begin{aligned} &\arg z \in \text{Argumentbereich (2) mit } j \equiv m \bmod 3 \\ &\qquad \Rightarrow \arg f^*(z) \in \text{Argumentbereich (1)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Zur Vereinfachung setzen wir jetzt für $z_1, z_2 \neq 0$

$$\sphericalangle(z_1, z_2) = \min(|\arg z_1 - \arg z_2|, 2\pi - |\arg z_1 - \arg z_2|).$$

Offensichtlich lässt sich $r \in \mathbb{R}^+$ so wählen, dass für alle $z \in \operatorname{Rand} \Delta_0$

$$\sphericalangle(z^n, f(z)) < \frac{\pi}{6} \tag{4}$$

ausfällt, und dann durch Wahl von $k_0 \in \mathbb{N}$ die Zerlegung von Δ_0 so fein machen, dass für alle $k \geqq k_0$ und alle Nachbarecken z', z'' auf dem Rand von Δ_0 gilt

$$\sphericalangle(z', z'') < \frac{\pi}{3n}. \tag{5}$$

Wird der Rand von Δ_0 positiv orientiert durchlaufen, so haben je zwei aufeinanderfolgende Ecken z', z'' wegen (3), (5) entweder gleiche oder im Sinne der zyklischen Ordnung 1, 2, 3 aufeinanderfolgende Signierungen, und zu jedem Argumentbereich (2) gibt es wegen (5) mindestens zwei Randecken. Da bis auf Ziffernwiederholungen genau n-mal der Signierungszyklus 1, 2, 3 durchlaufen wird, haben wir

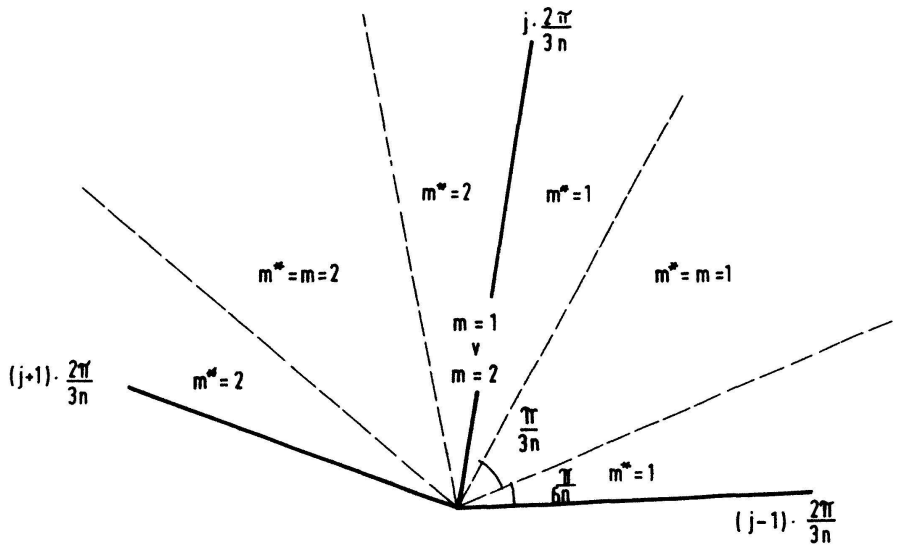
$$\sum_{s \in \operatorname{Rand} \Delta_0} \alpha^*(s) = n.$$

Wird nun die f^*-Signierung durch die f-Signierung ersetzt, so behält von den zu jedem Bereich (2) vorhandenen Randecken wegen (4) und (5) mindestens eine ihre Signierung (vgl. Fig. 4). Höchstens in den Bereichen

$$j\cdot\frac{2\pi}{3n} - \frac{\pi}{6n} < \arg z < j\cdot\frac{2\pi}{3n} + \frac{\pi}{6n} = (j+1)\cdot\frac{2\pi}{3n} - \frac{\pi}{2n}$$

können wegen (4) Signierungsänderungen auftreten, aber nur so, dass die f^*- und die f-Signierung beide zu $m \equiv j \bmod 3$ oder $m \equiv j+1 \bmod 3$ gehören (vgl. Fig. 4).

Durchlaufen wir wieder den Rand von Δ_0 wie vorher, so werden n getrennte *maximale* Teilfolgen benachbarter Ecken durchlaufen, die bezüglich f nur die Signierungen 1 oder 2 tragen, und zwar so, dass die erste Ecke mit 1 und



Figur 4. f^*-, f-Signierung in der z-Ebene; hier $j \equiv 1 \bmod 3$.

die letzte mit 2 signiert ist. Die zugehörigen Teildreieckseiten haben somit je ein Signierungspaar (1, 2) mehr als (2, 1). Daher gilt

$$\sum_{s \subset \operatorname{Rand} \Delta_0} \alpha^*(s) = n = \sum_{s \subset \operatorname{Rand} \Delta_0} \alpha(s) .$$

Es existieren also nach dem Hilfssatz zu jedem $k \geqq k_0$ sogar mindestens n vollständig signierte Teildreiecke. Damit ist der Beweis vollendet.

Bemerkung: Mit derselben Methode lassen sich erwartungsgemäß der Fixpunktsatz von Brouwer und der Retraktsatz (zunächst für Dreiecksbereiche) beweisen.

Hermann Hering, Technische Hochschule Aachen

LITERATURVERZEICHNIS

1 I. L. Brenner und R. C. Lyndon: Proof of the Fundamental Theorem of Algebra. AMM *88*, Nr. 4, 253ff. (1981).
2 H. W. Kuhn: A new proof of the Fundamental Theorem of Algebra. Math. Programming Study 1, North-Holland 1974, S. 148ff.

© 1984 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/84/020038-05$1.50 + 0.20/0