

# Zum Fundamentalsatz der Algebra

Autor(en): **Hering, Hermann**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 2

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38016>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Zum Fundamentalsatz der Algebra

Bewiesen wird (wieder einmal):

Jede ganz-rationale Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

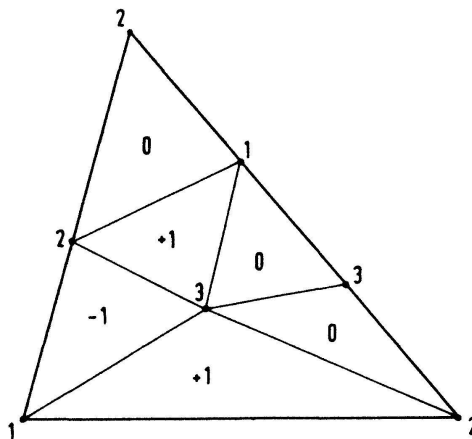
$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1,$$

hat mindestens eine Nullstelle.

Der hier vorgestellte Beweis<sup>1)</sup> basiert auf einem kombinatorischen Hilfssatz, für dessen Formulierung einige Bemerkungen erforderlich sind.

Ein Dreieck  $\Delta_0$  sei in Teildreiecke  $\Delta$  zerlegt,<sup>2)</sup> und alle Ecken seien mit einer der Ziffern 1, 2, 3 signiert. Ein Teildreieck mit paarweise verschiedenen Eckensignierungen heisst vollständig signiert.

Alle Teildreiecke seien im Sinne der (positiven) Orientierung der Ebene gleich orientiert. Dies induziert eine Orientierung der Teildreieckseiten und damit auch des Randes von  $\Delta_0$ .



Figur 1

Definiert man Bewertungen für orientierte Teildreiecke  $\Delta$ :

$$\alpha(\Delta) = \begin{cases} +1 & \text{für das Signierungstriplet (1, 2, 3)} \\ -1 & \text{für das Signierungstriplet (1, 3, 2)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und orientierte Teildreieckseiten  $s$ :

$$\alpha(s) = \begin{cases} +1 & \text{für das Signierungspaar (1, 2)} \\ -1 & \text{für das Signierungspaar (2, 1)} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

1) Nach einem am 5. 3. 1981 auf der Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Darmstadt gehaltenen Kurzvortrag. Andere Zugänge auf kombinatorischer Basis findet man in [1], [2].

2) Die Vereinigung der Teildreiecke ist das Dreieck, und je zwei Teildreiecke haben entweder keinen Punkt oder eine Ecke oder eine Seite gemeinsam.

so gilt der folgende

**Hilfssatz:**<sup>3)</sup> *In jedem in Teildreiecke  $\Delta$  zerlegten Dreieck  $\Delta_0$  sind die Summen der Bewertungen der Teildreiecke und der Bewertungen aller Teildreieckseiten auf dem Rand von  $\Delta_0$  gleich:*

$$\sum_{\Delta \subset \Delta_0} \alpha(\Delta) = \sum_{s \subset \text{Rand } \Delta_0} \alpha(s).$$

Beweis: Genau die Teildreiecke mit (1, 2, 3) oder (1, 3, 2) haben genau eine Seite mit (1, 2) oder (2, 1). Umläuft man alle Teildreiecke bei positiver Orientierung und addiert die  $\alpha(s)$ , so erhält man

$$\sum \alpha(s) = \sum_{s \subset \text{Rand } \Delta_0} \alpha(s).$$

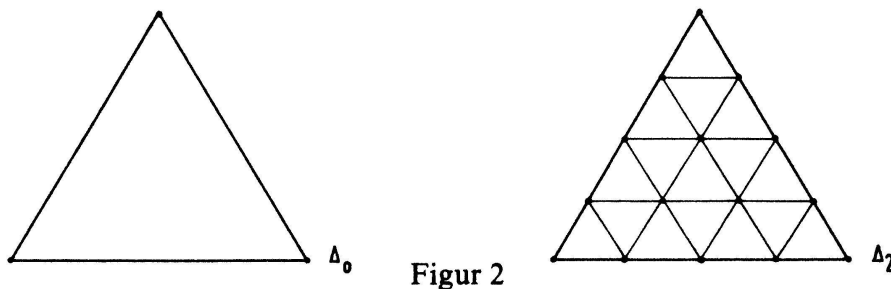
Die Summe der Teilsummen je Teildreieck  $\Delta$  ist  $\sum \alpha(\Delta)$ .

Folgerung: Ist  $\sum \neq 0$ , so gibt es mindestens  $|\sum|$  vollständig signierte Teildreiecke, d. h.  $|\sum|$  mehr von der einen als von der anderen Sorte (vgl. Fig. 1).

Beweis des Fundamentalsatzes: Mit der Annahme  $f(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  läßt sich eine Signierung der  $z \in \mathbb{C}$  definieren ( $0 \leq \arg w < 2\pi$ ):

$$m(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq \arg f(z) < \frac{2}{3}\pi \\ 2, & \text{falls } \frac{2}{3}\pi \leq \arg f(z) < \frac{4}{3}\pi \\ 3, & \text{falls } \frac{4}{3}\pi \leq \arg f(z) < 2\pi. \end{cases}$$

Sei  $\Delta_0$  ein gleichseitiges Dreieck in der komplexen Ebene, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, mit Inkreisradius  $r$ , über den später verfügt wird. Mit Hilfe der Mittelparallelens wird rekursiv eine Zerlegungsfolge von  $\Delta_0$  mit kongruenten Teildreiecken konstruiert:  $\langle \Delta_k \rangle$  (vgl. Fig. 2).



Figur 2

Wie im folgenden gezeigt wird, gibt es einen Index  $k_0$  (abhängig von der Funktion  $f$  und  $r$ ), so daß für alle Zerlegungen mit  $k \geq k_0$  vollständig signierte Teildreiecke existieren.

Damit lassen sich drei Eckpunkt-Folgen je gleicher Signierung definieren:

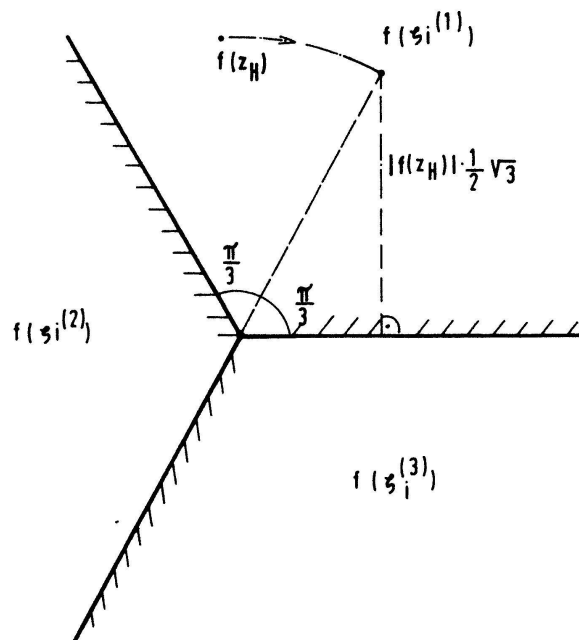
$$\langle z_i^{(m)} \rangle, \quad m = 1, 2, 3.$$

3) Dies ist eine verschärfende Verallgemeinerung des Sperrerschen Lemmas:  $\sum_{s \subset \text{Rand } \Delta_0} \alpha(s) = 1.$

Da die  $\langle z_i^{(j)} - z_i^{(p)} \rangle$ ,  $j \neq p$ , nach Konstruktion Nullfolgen sind, haben die  $\langle z_i^{(m)} \rangle$  einen gemeinsamen Häufungspunkt  $z_H \in \Delta_0$ . Daher gibt es drei Teilfolgen  $\langle \zeta_i^{(m)} \rangle$  der  $\langle z_i^{(m)} \rangle$ , die gegen  $z_H$  konvergieren. Genau eine hat dieselbe Signierung wie  $z_H$ . Dann konvergiert mindestens eine der beiden anderen Funktionswertfolgen  $\langle f(\zeta_i^{(m)}) \rangle$  – ihre Signierung sei  $m^*$  – nicht gegen  $f(z_H) \neq 0$ , da für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt:

$$|f(\zeta_i^{(m^*)}) - f(z_H)| \geq |f(z_H)| \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} > 0$$

(vgl. Fig. 3)<sup>4)</sup>, und wir haben einen Widerspruch zur Stetigkeit von  $f$  in  $z_H$ . Es bleibt zu zeigen, dass für jedes  $k \geq k_0$  vollständig signierte Teildreiecke existieren.



Figur 3. Hier ist  $\frac{\pi}{3} \leq \arg f(z_H) < \frac{2\pi}{3}$ ,  $m(z_H) = 1$ ,  $m^* = 3$ .

Die Argumente von  $f$  und der Vergleichsfunktion  $f^*$  mit  $f^*(z) = z^n$  unterscheiden sich für alle  $z$  mit «grossen» Beträgen nur «wenig». Daher wird zunächst  $\sum_{s \subset \text{Rand } \Delta_0} \alpha^*(s)$  bezüglich  $f^*$  berechnet und daraus  $\sum_{s \subset \text{Rand } \Delta_0} \alpha(s)$  bezüglich  $f$  gewonnen.

Nun präzisieren wir. Die Zerlegung aller (mod  $2\pi$  reduzierten)  $\arg f^*(z)$ ,  $z \neq 0$ :

$$(m - 1) \cdot \frac{2\pi}{3} \leq \arg f^*(z) = \arg z^n < m \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad m = 1, 2, 3, \tag{1}$$

4) Dies lässt sich mit einigem rechnerischen Aufwand auch rein analytisch zeigen.

legt für die zugehörigen  $\arg z$  die folgende Zerlegung nahe:

$$(j-1) \cdot \frac{2\pi}{3n} \leq \arg z < j \cdot \frac{2\pi}{3n}, \quad 1 \leq j \leq 3n. \tag{2}$$

Dann gilt für jede Signierziffer  $m$ :

$$\begin{aligned} \arg z &\in \text{Argumentbereich (2) mit } j \equiv m \pmod{3} \\ &\Rightarrow \arg f^*(z) \in \text{Argumentbereich (1)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Zur Vereinfachung setzen wir jetzt für  $z_1, z_2 \neq 0$

$$\star(z_1, z_2) = \min(|\arg z_1 - \arg z_2|, 2\pi - |\arg z_1 - \arg z_2|).$$

Offensichtlich lässt sich  $r \in \mathbb{R}^+$  so wählen, dass für alle  $z \in \text{Rand } \Delta_0$

$$\star(z^n, f(z)) < \frac{\pi}{6} \tag{4}$$

ausfällt, und dann durch Wahl von  $k_0 \in \mathbb{N}$  die Zerlegung von  $\Delta_0$  so fein machen, dass für alle  $k \geq k_0$  und alle Nachbarecken  $z', z''$  auf dem Rand von  $\Delta_0$  gilt

$$\star(z', z'') < \frac{\pi}{3n}. \tag{5}$$

Wird der Rand von  $\Delta_0$  positiv orientiert durchlaufen, so haben je zwei aufeinanderfolgende Ecken  $z', z''$  wegen (3), (5) entweder gleiche oder im Sinne der zyklischen Ordnung 1, 2, 3 aufeinanderfolgende Signierungen, und zu jedem Argumentbereich (2) gibt es wegen (5) mindestens zwei Randecken. Da bis auf Ziffernwiederholungen genau  $n$ -mal der Signierungszyklus 1, 2, 3 durchlaufen wird, haben wir

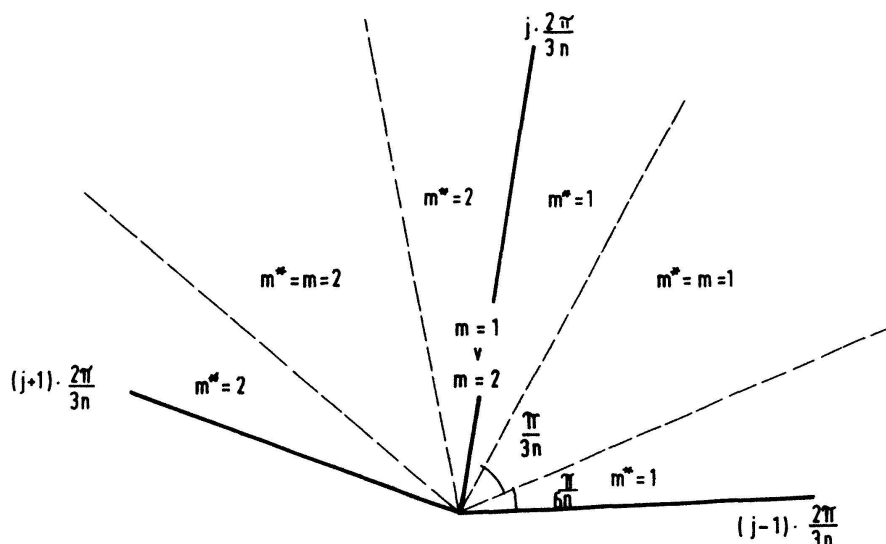
$$\sum_{s \in \text{Rand } \Delta_0} \alpha^*(s) = n.$$

Wird nun die  $f^*$ -Signierung durch die  $f$ -Signierung ersetzt, so behält von den zu jedem Bereich (2) vorhandenen Randecken wegen (4) und (5) mindestens eine ihre Signierung (vgl. Fig. 4). Höchstens in den Bereichen

$$j \cdot \frac{2\pi}{3n} - \frac{\pi}{6n} < \arg z < j \cdot \frac{2\pi}{3n} + \frac{\pi}{6n} = (j+1) \cdot \frac{2\pi}{3n} - \frac{\pi}{6n}$$

können wegen (4) Signierungsänderungen auftreten, aber nur so, dass die  $f^*$ - und die  $f$ -Signierung beide zu  $m \equiv j \pmod{3}$  oder  $m \equiv j+1 \pmod{3}$  gehören (vgl. Fig. 4).

Durchlaufen wir wieder den Rand von  $\Delta_0$  wie vorher, so werden  $n$  getrennte *maximale* Teilfolgen benachbarter Ecken durchlaufen, die bezüglich  $f$  nur die Signierungen 1 oder 2 tragen, und zwar so, dass die erste Ecke mit 1 und



Figur 4.  $f^*$ -,  $f$ -Signierung in der  $z$ -Ebene; hier  $j \equiv 1 \pmod{3}$ .

die letzte mit 2 signiert ist. Die zugehörigen Teildreieckseiten haben somit je ein Signierungspaar (1, 2) mehr als (2, 1). Daher gilt

$$\sum_{s \in \text{Rand } \Delta_0} \alpha^*(s) = n = \sum_{s \in \text{Rand } \Delta_0} \alpha(s).$$

Es existieren also nach dem Hilfssatz zu jedem  $k \geq k_0$  sogar mindestens  $n$  vollständig signierte Teildreiecke. Damit ist der Beweis vollendet.

**Bemerkung:** Mit derselben Methode lassen sich erwartungsgemäß der Fixpunktsatz von Brouwer und der Retraktsatz (zunächst für Dreiecksbereiche) beweisen.

Hermann Hering, Technische Hochschule Aachen

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 I. L. Brenner und R. C. Lyndon: Proof of the Fundamental Theorem of Algebra. AMM 88, Nr. 4, 253 ff. (1981).
- 2 H. W. Kuhn: A new proof of the Fundamental Theorem of Algebra. Math. Programming Study 1, North-Holland 1974, S. 148 ff.