Aufgaben

Aufgabe 894. Die hypergeometrische Reihe $F(1, 1; 1/2; z)$ stellt eine elementare transzendente Funktion dar. Man gebe diese an.

E. Lanckau, Karl-Marx-Stadt, DDR

Lösung: Wir werden die folgenden wohlbekannten, für komplexe z mit $|z| < 1$ gültigen Formeln für hypergeometrische Funktionen an:

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z) , \tag{1}$$

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{a\,b}{c} F(a+1, b+1; c+1; z) , \tag{2}$$

$$F(1/2, 1/2; 3/2; z^2) = z^{-1} \arcsin z . \tag{3}$$

Dabei ist bei der Potenz rechts in (1) ebenso wie bei arcsin in (3) der Hauptwert gemeint; für einen Beweis dieser Formeln vergleiche man etwa [1], S. 29 bzw. S. 25 bzw. S. 44. Mit (2) und (3) ist

$$\frac{d}{dz} F(-1/2, -1/2; 1/2; z) = \frac{1}{2} z^{-1/2} \arcsin z^{1/2} ;$$

andererseits ist die Funktion

$$G(z) := z^{1/2} \arcsin z^{1/2} + (1-z)^{1/2} \tag{4}$$

in $|z| < 1$ holomorph und genügt dort ebenfalls der Bedingung

$$\frac{d}{dz} G(z) = \frac{1}{2} z^{-1/2} \arcsin z^{1/2} .$$

Daher sind $F(-1/2, -1/2; 1/2; z)$ und $G(z)$ in $|z| < 1$ identisch, wenn man beachtet, dass bei $z = 0$ beide gleich 1 sind. Mit (1) und (4) sieht man direkt

$$F(1, 1; 1/2; z) = z^{1/2} (1-z)^{-3/2} \arcsin z^{1/2} + (1-z)^{-1} .$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 I. N. Sneddon: Spezielle Funktionen der mathematischen Physik, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1963.

Weitere Lösungen sandten R. Askey (Madison, USA), L. Cseh (Cluj, Rumänien), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. D. Mascioni (Origlio), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), H. Wallner (Graz, A), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 895. Für reelle α, β, x mit $\alpha > \beta > 0$, $x > 0$, $x \neq 1$ beweise man folgende Ungleichung:

$$\frac{x^{\alpha+\beta}-1}{x^{\alpha}-1} > \frac{\alpha+\beta}{2\alpha}(1+x^{\beta}) .$$

P. Ivády, Budapest, Ungarn

Solution: We prove the following generalization: If $f(t)$ and $g(t)$ are continuously differentiable, increasing functions on $[a, x]$ and $f'(t)/g'(t)$ is non-decreasing, then

$$\int_a^x g(t) f'(t)\, dt \geqq \frac{g(x)+g(a)}{2}[f(x)-f(a)] . \qquad (*)$$

The required inequality for $x > 1$ follows from (*) by simply setting $a = 1$, $g(t) = t^{\beta}$, $f(t) = t^{\alpha}$ and for $0 < x < 1$ by exchanging the roles of a and x.

Proof of (*): By the mean value theorem and since f'/g' is non-decreasing, we have for $t \in [a, x]$

$$\frac{f(t)-f(a)}{g(t)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leqq \frac{f'(t)}{g'(t)} .$$

This yields

$$f(t)\, g'(t) - f(a)\, g'(t) + g(a)\, f'(t) \leqq g(t)\, f'(t) ,$$

and so

$$[f(t)\, g(t)]' - f(a)\, g'(t) + g(a)\, f'(t) \leqq 2 g(t)\, f'(t) .$$

Integrating the last inequality on $a \leqq t \leqq x$, we obtain (*).

A. Meir, Edmonton, CD

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), J. H. van Lint (Pasadena, USA), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. D. Mascioni (Origlio), J. B. Melissen (Utrecht, NL), Chr. A. Meyer (Ittigen), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), H. Wallner (Graz, A), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1984* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175).

Aufgabe 906. Es seien $a \neq 1$ und n natürliche Zahlen, ferner p eine Primzahl mit $p \nmid a$. Man bestimme den genauen Exponenten $\varepsilon = \varepsilon(a, n, p)$, mit welchem p in dem Produkt

$$P_n(a) := \prod_{i=1}^{n} (a^i - 1)$$

auftritt.

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Aufgabe 907. Show that $(y+z)/(1+yz)$, $(z+x)/(1+zx)$ and $(x+y)/(1+xy)$ are sides of a triangle where $x = \tan A/4$, $y = \tan B/4$, $z = \tan C/4$ and A, B, C are sides of a triangle.

M. S. Klamkin, Edmonton, CD

Literaturüberschau

H.R. Jacobs: Mathematics, A Human Endeavor. 2. Auflage, XIII und 649 Seiten, 847 Abbildungen, £12.60. Freeman, San Francisco 1982.

Der Untertitel dieses Buches «A Book for Those Who Think They Don't Like the Subject» muss auf viele, die nach einschlägigen Erfahrungen auf der Schule seither von der Mathematik nichts mehr wissen wollen, einen guten Eindruck ausgeübt haben. Wie Martin Gardner, ein bekannter amerikanischer «Recreational Mathematician» im Vorwort schreibt, wurde es schnell zu einem der erfolgreichsten einführenden Lehrbücher für Laien. Der Erfolg gründet sich auf die häufige Verwendung von Cartoons, schönen Bildchen, Spielen, Puzzles, Paradoxien, magischen Tricks usw. In der zweiten Auflage wurde das Buch in dieser Hinsicht sogar noch verbessert. Trotz einigen prinzipiellen Bemerkungen zum Wesen mancher mathematischen Begriffe erhält man ein eher naives Bild von der Mathematik und ihrer Geschichte, sowie ihrer Anwendung auf die verschiedenen Bereiche der Wissenschaft. R. Ziegler

D.J.S. Robinson: A Course in the Theory of Groups. Graduate Texts in Mathematics, Band 80, XVII und 481 Seiten, DM 98.–. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1982.

Dieser Text überbrückt die Spanne zwischen der Kenntnis algebraischer Grundbegriffe und dem Einstieg in die spezialisierte Fachliteratur über Gruppentheorie. In einem erstaunlich weit gefassten Bereich – doch ohne Anspruch auf lückenlose Vollständigkeit – wird der Leser vertraut gemacht mit grundlegenden algebraischen Begriffen und Techniken aus dem Umfeld der Gruppentheorie, mit ihren gegenseitigen Zusammenhängen und den Wechselbeziehungen zu den angrenzenden Gebieten der Algebra. Klare Erläuterungen und eine gute Gliederung erleichtern die Lektüre des umfangreichen Buches. Als Ergänzung methodischer oder inhaltlicher Art dienen die etwa 650 Übungsaufgaben von stark wechselndem Schwierigkeitsgrad. Wer einen auf die algebraischen Gesichtspunkte ausgerichteten Zugang zur Gruppentheorie und zu neuern Arbeiten in diesem Bereich sucht, dürfte mit diesem Text gut versehen sein. H.R. Schneebeli