

Umschreibung eines konvexen Körpers des \mathbb{R}^2 mit Mittelpunkt durch ein Parallelogramm

Autor(en): **Penzkofer, Konrad**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 3

PDF erstellt am: **27.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38017>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 39

Nr. 3

Seiten 57–80

Basel, 10. Mai 1984

Umschreibung eines konvexen Körpers des \mathbb{R}^2 mit Mittelpunkt durch ein Parallelogramm

Beim Vergleich von zwei Normen ist es natürlich, dass man das Verhältnis der Strecken längs einer Richtung vom Ursprung zum Rand der 2 Eichkörper untersucht. Ausser der Aussage über die Äquivalenz von zwei Normen kann man auch Resultate in der Theorie der Banachräume daraus herleiten, insbesondere über den Abstand zwischen isomorphen normierten Räumen.

Wie der Titel besagt, wurde in dieser Hinsicht ein beschränktes Ergebnis erzielt, das der Inhalt des Satzes unten ist. Nach ein paar einführenden Bemerkungen wird der Satz formuliert, bewiesen und es folgt dann eine Einbettung in den oben angeführten Problemkreis.

Fritz John hat gezeigt [4], dass ein punktsymmetrischer, konvexer Körper des \mathbb{R}^n durch ein Ellipsoid so umschrieben werden kann, dass für das Verhältnis λ der Strecken auf einem Strahl vom Mittelpunkt zum Rand des konvexen Körpers bzw. zum Rand des Ellipsoids gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \lambda \leq 1.$$

W. Meixner [3] hat den punktsymmetrischen, konvexen Körper in einem Vektorraum mit einem Doppelkegel so umschrieben, dass für das Verhältnis λ gilt:

$$\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$$

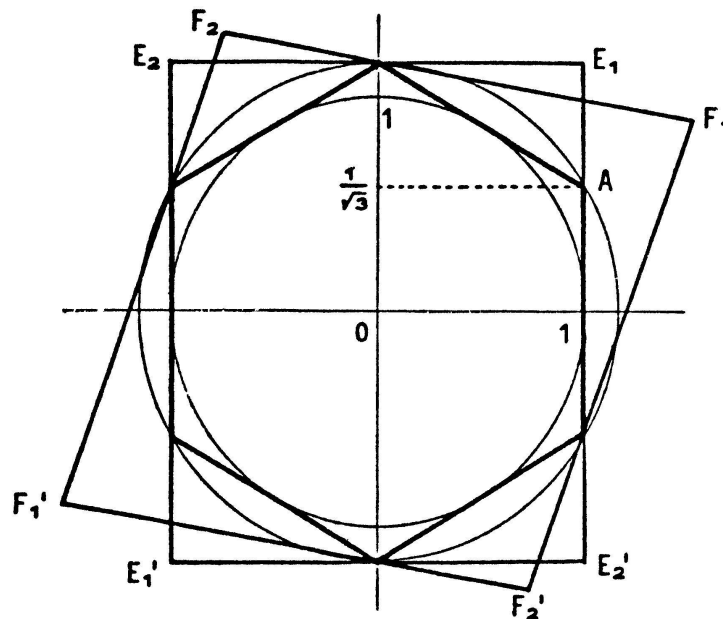
und gezeigt, dass sich diese Abschätzung für jede beliebige Richtung der Spitze des Kegels erreichen lässt. Das ist eine bestmögliche richtungsunabhängige Abschätzung, wie man am Beispiel des Quadrats sieht. W. Meixner hat dann die Frage gestellt: Was für ein Verhältnis lässt sich erreichen, wenn man die Richtung der Spitze des Kegels günstig wählen darf? Es soll hier folgendes Ergebnis bewiesen werden.

Satz: *Ein beschränkter, konvexer Körper l des \mathbb{R}^2 mit Mittelpunkt kann durch ein Parallelogramm so umschrieben werden, dass für das Verhältnis λ der*

Strecken auf einem Strahl vom Mittelpunkt zum Rand von l bzw. zum Parallelogramm gilt:

$$\frac{2}{3} \leq \lambda \leq 1.$$

Der Wert 1 wird natürlich angenommen im Falle eines Parallelogramms, der Wert $\frac{2}{3}$ beim regelmässigen Sechseck. Im letzten Fall (siehe Fig. 1) hat man



Figur 1

wegen der Symmetrien nur zwei Möglichkeiten zu überprüfen: die Parallelogramme $E_1E_2E_1'E_2'$ und $F_1F_2F_1'F_2'$. Für spätere Vergleichsmöglichkeiten sind noch der Inkreis und der Umkreis eingezeichnet. Auch im folgenden bezeichne ein Buchstabe mit ' den punktsymmetrischen Punkt zum Ursprung. Für die Definition der Standardbegriffe siehe «Theorie der konvexen Körper» von T. Bonnesen und W. Fenchel [2].

Für den Beweis wird der Begriff eines **Maximumsbereichs** benützt. Dieser Begriff wurde von Felix Behrend eingeführt, der auch die folgenden drei Sätze bewies [1].

Sei K die Menge aller konvexen Körper des \mathbb{R}^2 mit Mittelpunkt, $L_1 \subset K$ die Klasse der Affintransformierten eines $l_0 \in K$. Für geeignet gewählte Funktionen $g: K \rightarrow \mathbb{R}_+$ existiert ein $l_1 \in L_1$, so dass $g(l_1) = \max \{g(l): l \in L_1\}$. l_1 wird **Maximumsbereich** von l_0 bzgl. g genannt. Behrend betrachtet solche g , die auf Affinvarianten führen.

Sei im folgenden $g(l) := b/a$, wo b die Dicke und d der Durchmesser von l ist. $g(l)$ ist eine positive Zahl und nach oben durch 1 beschränkt.

Satz 1. Zu jedem $l \in K$ existiert (mindestens) ein Maximumsbereich l_1 bzgl. g .

Behrend bemerkt [1, S. 731], dass dies aus dem Auswahlssatz von Blaschke folgt.

Satz 2. *Ist l_1 ein Maximumsbereich bzgl. g , so besitzt l_1 ein Paar von Sehnen δ_1, δ_2 der Länge d (= Durchmesser) und ein Paar von Sehnen β_1, β_2 der Länge b (= Dicke), deren Richtungen sich gegenseitig trennen.*

Unter «Richtung» ist der Winkel (mod π) der Geraden, auf der die Strecke liegt, mit der positiven x-Achse zu verstehen (nach Einführung eines geeigneten Koordinatensystems).

Zum Beispiel, falls $l = e$ eine Ellipse ist, dann ist offenbar $l_1 = k$ ein Kreis, mit $g(k) = 1$. Ist $l = p$ ein Parallelogramm, dann ist $l_1 = q$ ein Quadrat und es gilt: $g(q) = 1/\sqrt{2}$.

Satz 3. *Sei q ein Quadrat, k ein Kreis und l_1 ein davon verschiedener Maximumsbereich. Dann gilt:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = g(q) < g(l_1) < g(k) = 1.$$

Daraus kann man auch das Ergebnis von W. Meixner $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ herleiten. Wegen der Invarianz des Verhältnisses λ bei linearen Transformationen, genügt es, ein Parallelogramm für jeden möglichen punktsymmetrischen Maximumsbereich bzgl. g zu finden.

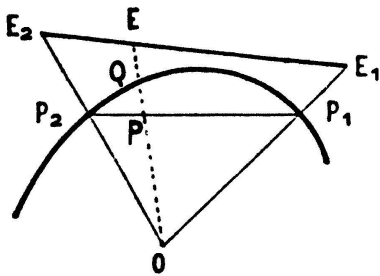
Sei l_1 ein solcher Maximumsbereich. Offensichtlich hat l_1 einen Mittelpunkt. Sei dieser in 0. $\delta_1, \delta_2, \beta_1, \beta_2$ in Satz 2 können so gewählt werden, dass sie durch 0 gehen. Ohne Einschränkung β_1 liege auf der x-Achse zwischen den Punkten $M := (1, 0)$ und $M' := (-1, 0)$. Wegen Satz 3 hat jeder Maximumsbereich einen Umkreis mit $1 \leq r \leq \sqrt{2}$. Wegen Satz 2 berührt l_1 den Umkreis mindestens in 2 punktsymmetrischen Paaren von Punkten und ebenso den Inkreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1.

Die Tangente in M an den Inkreis schneide den Umkreis in $A := (1, a)$ mit $a = \sqrt{r^2 - 1}$. a nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, da $1 \leq r \leq \sqrt{2}$.

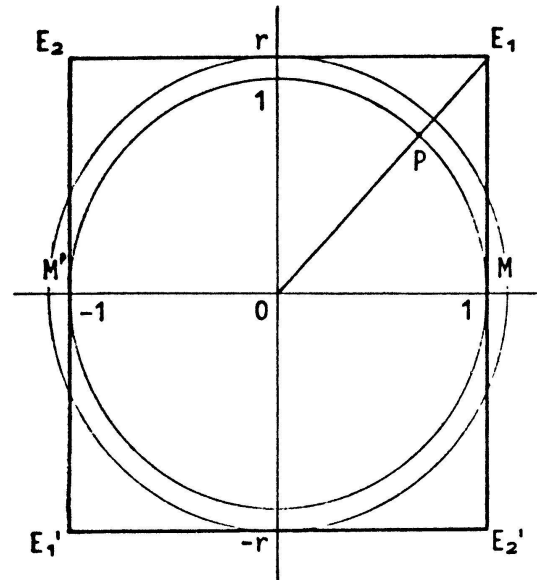
Es genügt λ längs der 2 Richtungen zu den Ecken des umschreibenden Parallelogramms zu überprüfen, weil λ dort minimal wird, wie man leicht aus Fig. 2 sieht.

Bei der Konstruktion des umschreibenden Parallelogramms werden zwei Fälle unterschieden: I) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ und II) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$. Während Fall I sich sofort erledigt, ist Fall II etwas langwierig. Da $\lambda = \frac{2}{3}$ im Fall des regelmässigen Sechsecks angenommen wird und daher nicht zu überbieten ist, wird eine Ecke so festgelegt, dass dort $\lambda = \frac{2}{3}$ ist. Damit gelingt es, Polynome höheren Grades zu vermeiden und den damit verbundenen Aufwand bei der Suche nach Nullstellen.

I. Für $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ umschreibt das von den Tangenten in den Punkten $(1, 0)$, $(0, r)$, $(-1, 0)$ und $(0, -r)$ begrenzte Rechteck $E_1 E_2 E'_1 E'_2$ den Körper l_1 (siehe Fig. 3). Hier sei E_1 der Schnittpunkt der Tangenten durch $(1, 0)$ und $(0, r)$. OE_1 schneide den Einheitskreis in P. Dann genügt es zu zeigen, dass



Figur 2

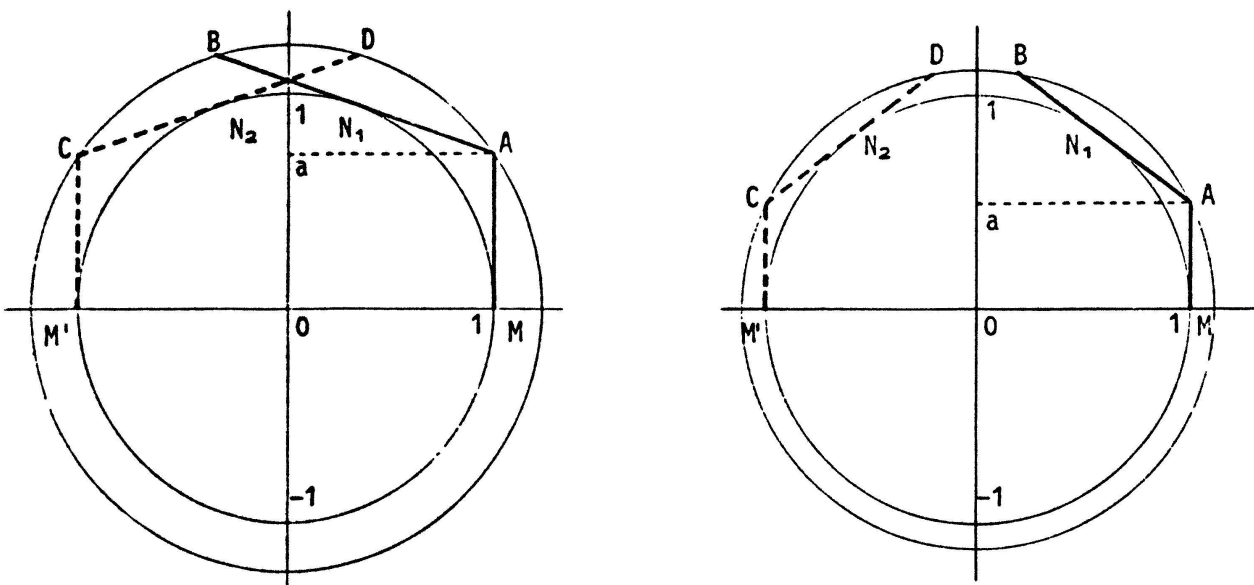


Figur 3

$\frac{OP}{OE_1} \geq \frac{2}{3}$. Da aber $OE_1 = \sqrt{1+r^2} = \sqrt{2+a^2}$ und $OP = 1$, folgt $\frac{OP}{OE_1} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 9 \geq 4(2+a^2) \Leftrightarrow 1 \geq 4a^2 \Leftrightarrow |a| \leq \frac{1}{2}$.

II. Sei $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$. Von A lege man die 2. Tangente an den Inkreis (Berührungspunkt N_1). Dieser schneide den Umkreis nochmals in B (siehe Fig. 4). Man findet $B = \frac{1}{1+a^2}(1-3a^2, a(3-a^2))$.

Sei D der Spiegelpunkt von B und N_2 der Spiegelpunkt von N_1 , bzgl. der y-Achse. Sei $C := (-1, a)$. Für $a = 1/\sqrt{3}$ ist $B = D$ und $ABCA'B'C'$ ist ein regelmässiges Sechseck. Für $1/\sqrt{3} < a \leq 1$ liegt B im 2. Quadranten, für $0 \leq a < 1/\sqrt{3}$ im 1. Quadranten.



Figur 4

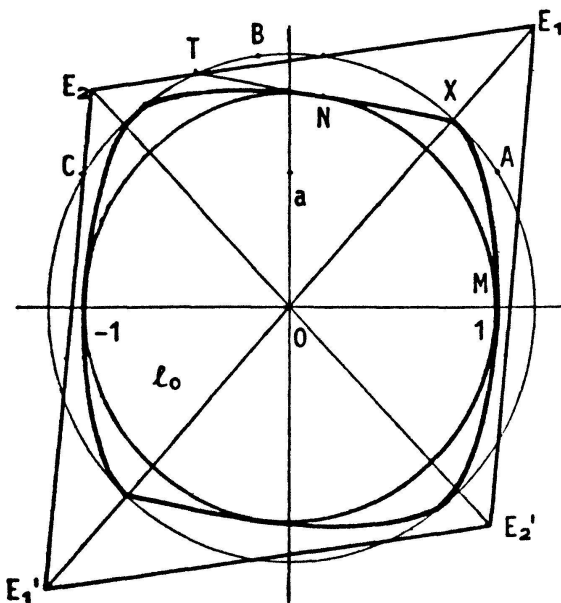
MA und M'C liegen auf Stützgeraden von l_1 . Jeweils ein Endpunkt der beiden Sehnen δ_1 und δ_2 aus Satz 2 liegt dann auf dem Bogen AC des Umkreises, auf dem auch B liegt. Da aber die Richtung der Sehne β_2 , die Richtungen von δ_1 und δ_2 trennt, berührt β_2 den Inkreis (und l_1) in einem Punkt N, der zwischen N_1 und N_2 liegt. Die Tangente in N an den Inkreis schneidet den Umkreis zwischen A und D und zwischen B und C. Also berührt l_1 den Umkreis mindestens einmal auf dem Bogen AD und auf dem Bogen BC im oberen Halbkreis.

Dann gibt es zwei Möglichkeiten: $\sphericalangle MON \leq \pi/2$ und $\sphericalangle MON > \pi/2$. Es genügt, den Fall $\sphericalangle MON \leq \pi/2$ zu betrachten, da der 2. Fall durch eine Spiegelung an der y-Achse in den 1. überführt werden kann. Sei $X := (x, y)$ ein Berührungspunkt von l_1 mit dem Umkreis zwischen A und D. Für die Grenzlage $\sphericalangle MON = \pi/2$ erhält man als letzten möglichen Berührungspunkt von l_1 mit dem Umkreis zwischen A und D den Punkt $(a, 1) =: A_1$. Daher gilt $a \leq x \leq 1$ und $a \leq y \leq 1$. Von X lege man die Tangente an den Inkreis, deren Berührungspunkt zwischen N_1 und N_2 liegt. Diese schneide den Umkreis wieder in T. Hier kann l_1 den Umkreis frühestens wieder berühren. Sei $E_1 = \frac{3}{2} \overrightarrow{OX}$.

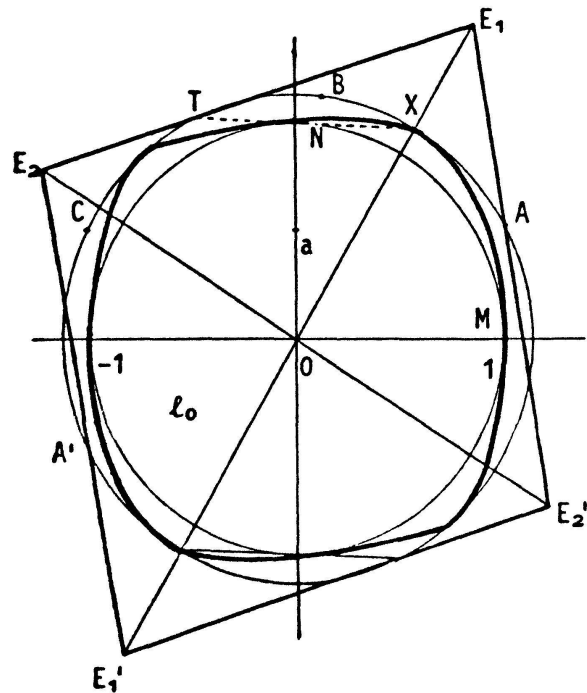
Von E_1 und E'_1 aus wird das l_1 umschreibende Parallelogramm konstruiert. Dabei werden 2 Fälle unterschieden.

Falls $x \geq \frac{2}{3}$, sei E_2 der Schnittpunkt von E_1T und E'_1C (siehe Fig. 5). Falls $x < \frac{2}{3}$, sei E_2 der Schnittpunkt von E_1T und E'_1A' (siehe Fig. 6). Der letzte Fall tritt nur für $a \leq \frac{2}{3}$ ein.

Damit liegt l_1 im Parallelogramm $E_1E_2E'_1E'_2$. Zum **Beweis** betrachte man die Grenzlagen von X, nämlich A und A_1 . Seien $F_1F_2F'_1F'_2$ und $H_1H_2H'_1H'_2$ die zugehörigen Parallelogramme, also mit $F_1 := \frac{3}{2} \overrightarrow{OA}$ und $H_1 := \frac{3}{2} \overrightarrow{OA_1}$ (siehe

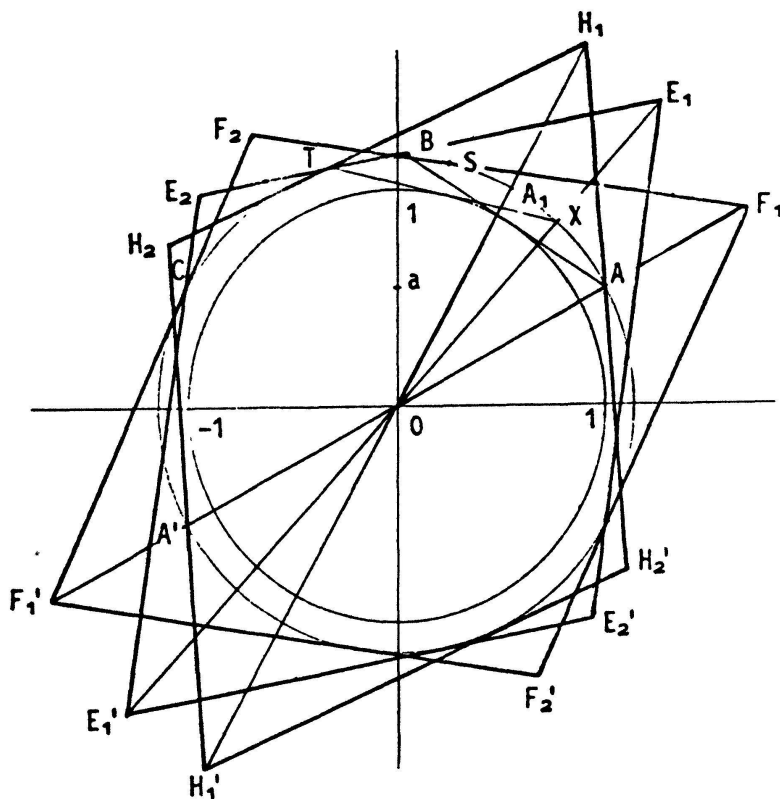


Figur 5



Figur 6

Fig. 7). Der Winkel $\sphericalangle F_1AH_1 < \pi/2$ für $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$, denn das Skalarprodukt $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AH_1} = \frac{1}{2}(-a^2 + 3a - 1) > 0$ für $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < a < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, also auch für $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$. Somit schneidet H_1A den Umkreis nicht zwischen H_1 und A . Für X zwischen A und A_1 schneidet E_1E_2 den Umkreis nicht im Sektor AOX . Die Gerade F_1B schneidet den Umkreis in B . Für den 2. Schnittpunkt S mit dem Umkreis erhält man $S = \frac{1}{25a^2 + 1}(15a^2 - 1, a(25a^2 + 9))$. Durch Vergleich der 1. Koordinaten etwa, sieht man, dass S zwischen B und F_1 liegt für $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$. Für beliebiges X schneidet E_1T den Umkreis auch nur zwischen E_1 und T , denn die Dreiecke AF_1B und XE_1T sind kongruent. Somit ist sichergestellt, dass im Sektor MOE_2 l_1 im Parallelogramm enthalten ist für beliebiges X . F_2 hat die Koordinaten $\frac{6a}{1 + 5a^2}(-a, 1)$. Ferner gilt $\sphericalangle OCF_2 > \pi/2$, denn $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CF_2} = \frac{1 - a^2}{1 + 5a^2}(1 - 5a^2) < 0$ für $1 > a > 1/\sqrt{5}$.



Figur 7

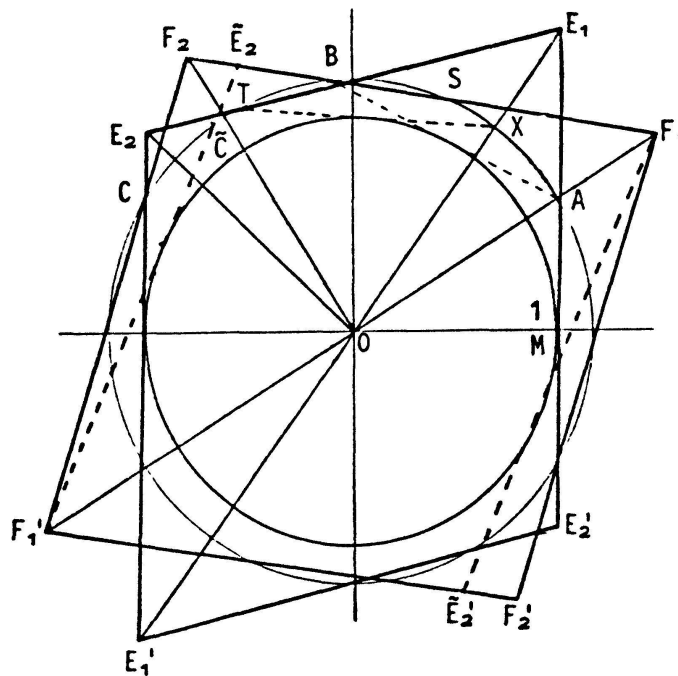
Also schneidet F_2C den Umkreis nicht zwischen C und F_2 und für X zwischen A und A_1 schneidet E_2E_1 den Umkreis erst recht nicht im Sektor E_2OC . Im Sektor COM' kann es sowieso zu keinen Überschneidungen kommen zwischen l_1 und dem oben konstruierten Parallelogramm. Wegen der Punkt-

symmetrie kommt es auch zu keinen Überschneidungen in der unteren Halbebene.

Nun wird gezeigt, dass das Parallelogramm $E_1E_2E'_1E'_2$ die Bedingung $\lambda \cong \frac{2}{3}$ in allen Richtungen erfüllt.

1. Fall: $x \cong \frac{2}{3}$ (bei festem $a \in [\frac{1}{2}, 1]$). In Richtung $\overrightarrow{OE_1}$ ist $\lambda = \frac{2}{3}$ nach Konstruktion. Es bleibt λ in Richtung $\overrightarrow{OE_2}$ (hiernach mit λ_2 bezeichnet) abzuschätzen.

Man drehe das Parallelogramm $E_1E_2E'_1E'_2$ um O um $\sphericalangle XOA$, so dass $E_1 \mapsto F_1$, $E'_1 \mapsto F'_1$, $T \mapsto B$, $X \mapsto A$, $C \mapsto \tilde{C}$, $E_2 \mapsto \tilde{E}_2$. Für \tilde{C} , \tilde{E}_2 sei dies die Definition. Es ist $\sphericalangle TOB = \sphericalangle XOA$ und T liegt zwischen C und B auf dem Umkreis. Damit liegt \tilde{C} zwischen C und B und \tilde{E}_2 zwischen F_2 und B (siehe Fig. 8).



Figur 8

Die Senkrechte von O auf F_1F_2 halbiert BS (S zwischen B und F_1 , siehe oben). $\Rightarrow OE_2 = O\tilde{E}_2 < OF_2$. Weiter gilt für $a \cong 0$:

$$OF_2 = \frac{6a}{1+5a^2} \sqrt{1+a^2} \cong \frac{3}{2} \Leftrightarrow (3a^2 - 1)^2 \cong 0.$$

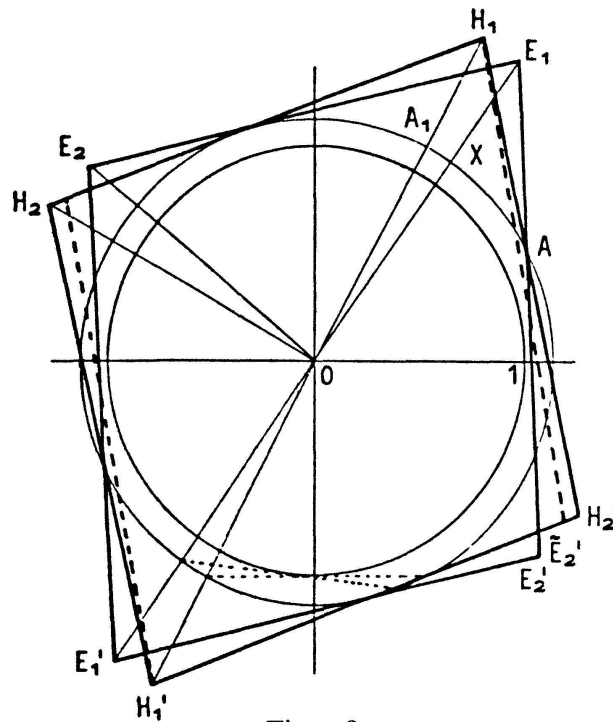
Daher gilt

$$\lambda_2 \cong \frac{1}{OF_2} \cong \frac{2}{3}.$$

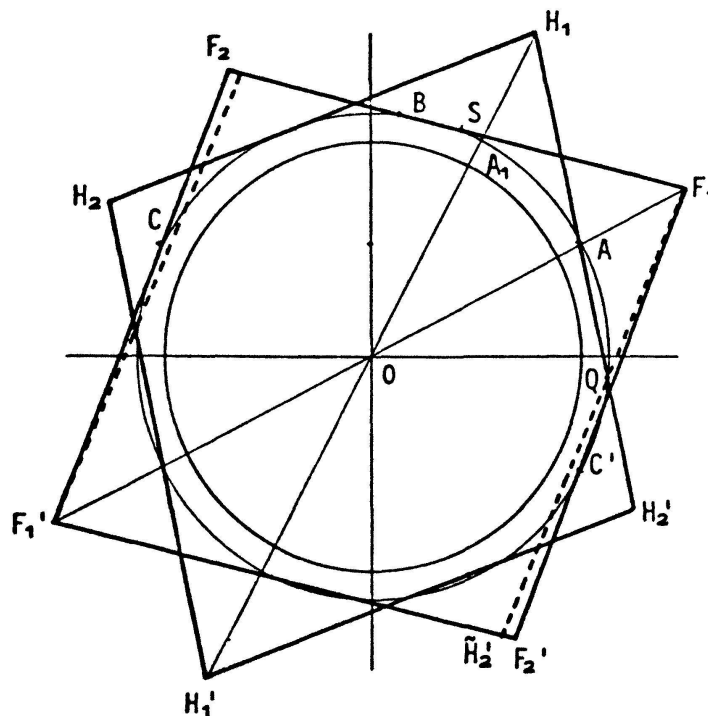
Beachte, dass Gleichheit nur im Falle $a = 1/\sqrt{3}$ gilt (der Fall des regelmässigen Sechsecks).

2. Fall: $\frac{1}{2} \cong x \cong \frac{2}{3}$ (bei festem $a \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$). Ähnlich wie oben, drehe man $E_1E_2E'_1E'_2$ um O aber um $\sphericalangle XOA_1$, so dass $E_1 \mapsto H_1$, $E'_1 \mapsto H'_1$, $X \mapsto A_1$, $E_2 \mapsto \tilde{E}_2$ (siehe Fig. 9). Da $\widehat{XA} < \widehat{A_1A}$, kommt \tilde{E}_2 (der Bildpunkt von E_2) zwischen H_2 und H'_1 zu liegen.

$$\Rightarrow OE_2 = OE'_2 = O\tilde{E}_2 < OH_2 = OH_2.$$



Figur 9



Figur 10

Wenn nun gezeigt ist, dass $OH_2 < OF_2$ ist, sind wir fertig. Eine Drehung um O , die $A_1 \mapsto A$ überführt, soll dies beweisen. Dabei werde $A \mapsto Q$ und $H_2 \mapsto \tilde{H}_2$ abgebildet (siehe Fig. 10). $\Rightarrow \widehat{AQ} = \widehat{A_1A}$.

Weiter gilt, dass $\widehat{AS} > \widehat{AA_1}$, denn die 2. Komponente von S

$$s_2 := \frac{a(25a^2 + 9)}{25a^2 + 1} > 1 \Leftrightarrow f(a) := 25a^3 - 25a^2 + 9a - 1 > 0.$$

Wegen $f'(a) = 75a^2 - 50a + 9 > 0$ für alle a , ist $f(a)$ streng monoton steigend.

Da $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$, ist auch $s_2 > 1$. Damit gilt auch $\sphericalangle OF_1S > \sphericalangle OF_1A_1$. Nun ist $\sphericalangle OF_1A_1 = \sphericalangle QF_1O$ (nach Konstruktion) und $\sphericalangle OF_1S = \sphericalangle C'F_1O$, da AC' auch eine Tangente an den Inkreis ist. $\Rightarrow \sphericalangle QF_1O < \sphericalangle C'F_1O$ und damit liegt \tilde{H}_2 zwischen F'_1 und F'_2

$$\Rightarrow OH_2 = OH_2 < OF'_2 = OF_2.$$

Das so konstruierte Parallelogramm ist meistens nicht das bestmögliche. In vielen Fällen würde man schon ein besseres erhalten, wenn man das Verhältnis λ auf den beiden Richtungen OF_1, OF_2 gleich machen würde. Der Rechenaufwand nimmt allerdings erheblich zu. Weiter wird l_1 vorausgesetzt als gegeben. Die Frage, wie man aus einem gegebenen l einen zugehörigen Maximumsbereich l_1 erhält, ist offen. Behrend hat gezeigt, dass die Trennungseigenschaft von Satz 2 auch hinreichend ist für einen Maximumsbereich und dass dieser eindeutig ist [1, S. 730].

Unser Satz besagt, dass es zu einem punktsymmetrischen, konvexen Körper l des \mathbb{R}^2 und einem Parallelogramm p , mit Mittelpunkt jeweils im Ursprung, einen Isomorphismus $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, so dass

$$(*) \lambda p \subset Tl \subset p$$

mit $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq 1$. Mit einem Kompaktheitsargument folgt das

Korollar. *Es gibt einen Isomorphismus $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass in (*) λ maximal wird.*

Nimmt man statt p einen anderen punktsymmetrischen, konvexen Körper l' des \mathbb{R}^2 , so gibt es ebenfalls ein maximales λ , so dass $\lambda l' \subset Tl \subset l'$, da l und l' kompakt sind. Für einen ausführlichen Beweis siehe etwa Macbeath [5, S. 56]. Nur sind im allgemeinen keine Schranken für λ bekannt. Falls l' eine Ellipse ist, dann gilt $1/\sqrt{2} \leq \lambda \leq 1$ [4, S. 203]. Sei $\varrho := 1/\lambda$ und K_0 die Menge der konvexen Körper mit Mittelpunkt im Ursprung. Ähnlich wie bei Dvoretzky [3, S. 156] definieren wir eine Pseudometrik auf K_0

$$d(l, l') := \inf \{ \log \varrho : l' \subset Tl \subset \varrho l', \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ein Isomorphismus} \}.$$

Seien X und Y normierte Räume mit dem \mathbb{R}^2 als Vektorraum und mit l bzw. l' als Eichkörper der Norm von X bzw. Y und definiere

$$d(X, Y) := \inf \{ \log \| T \| \cdot \| T^{-1} \| : T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ein Isomorphismus} \} = d(l, l').$$

Für eine ausführliche Beschreibung siehe Schäffer [7, S. 72]. $d(X, Y) = 0$, falls l und l' den gleichen Maximumsbereich haben. Dann gibt es eine Isometrie zwischen X und Y . Isometrie erzeugt Äquivalenzklassen auf X_2 (der Menge aller normierten Räume mit dem \mathbb{R}^2 als Vektorraum), die wir Isometrieklassen nennen (Schäffer nennt sie Kongruenzklassen). Ein Repräsentantensystem für diese Isometrieklassen ist die Menge der normierten Räume, die einen Maximumsbereich als Eichkörper der Norm besitzen. Auf der Menge der Isometrieklassen \tilde{X}_2 wird durch $\tilde{d}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d(X, Y)$ eine Metrik definiert. Sei \tilde{P} die Klasse der normierten Räume, die ein Parallelogramm als Eichkörper besitzen. Dann ist aufgrund unseres Satzes $0 \leq \tilde{d}(\tilde{X}, \tilde{P}) \leq \log \frac{3}{2}$. Für die Klasse \tilde{E} mit Ellipsen als Eichkörper gilt $0 \leq \tilde{d}(\tilde{X}, \tilde{E}) \leq \log \sqrt{2}$.

Ich möchte H. Meixner ganz herzlich danken für alle seine hilfreichen Anregungen.

Konrad Penzkofer, TU München

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Felix Behrend: Über einige Affinvarianten konvexer Bereiche. *Math. Ann.* 113, 713–747 (1937).
- 2 T. Bonnesen und W. Fenchel: Chelsea Publishing Company Bronx, New York 1971.
- 3 A. Dvoretzky: Some results on convex bodies and Banach spaces. *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces*, S. 123–160. Jerusalem Academic Press 1961.
- 4 Fritz John: Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. *Courant Anniversary Volume 1948*, S. 187–204.
- 5 A. M. Macbeath: A compactness theorem for affine equivalence-classes of convex regions. *Canad. J. Math.* 3, 54–61 (1961).
- 6 Werner Meixner: Inequalities relating norms and corresponding equivalent order unit norms. To appear.
- 7 J. J. Schäffer: Inner diameter, perimeter, and girth of spheres. *Math. Ann.* 173, 59–82 (1967).