**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 39 (1984)

**Heft:** 3

**Artikel:** Umschreibung eines konvexen Körpers des IR2 mit Mittelpunkt durch ein Parallelogramm

**Autor:** Penzkofer, Konrad

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-38017

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik*
*und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math. | Band 39 | Nr. 3 | Seiten 57–80 | Basel, 10. Mai 1984

# Umschreibung eines konvexen Körpers des $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt durch ein Parallelogramm

Beim Vergleich von zwei Normen ist es natürlich, dass man das Verhältnis der Strecken längs einer Richtung vom Ursprung zum Rand der 2 Eichkörper untersucht. Ausser der Aussage über die Äquivalenz von zwei Normen kann man auch Resultate in der Theorie der Banachräume daraus herleiten, insbesondere über den Abstand zwischen isomorphen normierten Räumen.
Wie der Titel besagt, wurde in dieser Hinsicht ein beschränktes Ergebnis erzielt, das der Inhalt des Satzes unten ist. Nach ein paar einführenden Bemerkungen wird der Satz formuliert, bewiesen und es folgt dann eine Einbettung in den oben angeführten Problemkreis.
Fritz John hat gezeigt [4], dass ein punktsymmetrischer, konvexer Körper des $\mathbb{R}^n$ durch ein Ellipsoid so umschrieben werden kann, dass für das Verhältnis $\lambda$ der Strecken auf einem Strahl vom Mittelpunkt zum Rand des konvexen Körpers bzw. zum Rand des Ellipsoids gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leqq \lambda \leqq 1 .$$

W. Meixner [3] hat den punktsymmetrischen, konvexen Körper in einem Vektorraum mit einem Doppelkegel so umschrieben, dass für das Verhältnis $\lambda$ gilt:

$$\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq 1$$

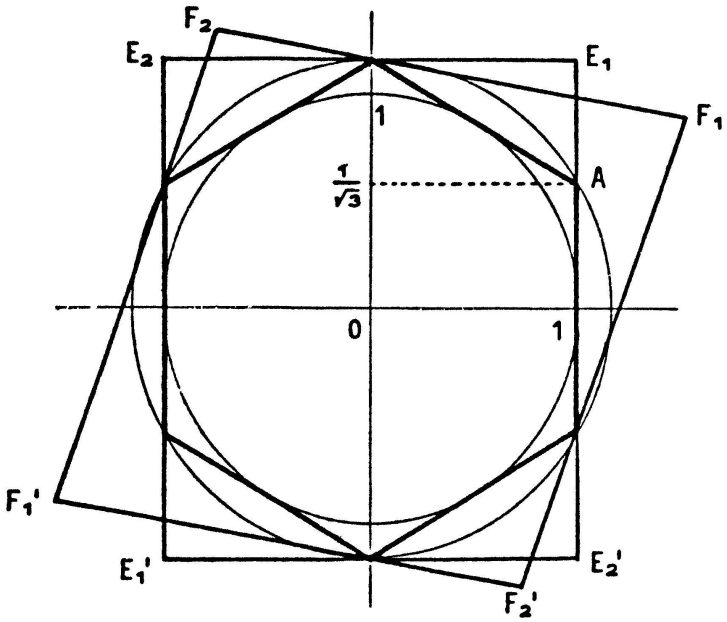
und gezeigt, dass sich diese Abschätzung für jede beliebige Richtung der Spitze des Kegels erreichen lässt. Das ist eine bestmögliche richtungsunabhängige Abschätzung, wie man am Beispiel des Quadrats sieht. W. Meixner hat dann die Frage gestellt: Was für ein Verhältnis lässt sich erreichen, wenn man die Richtung der Spitze des Kegels günstig wählen darf? Es soll hier folgendes Ergebnis bewiesen werden.

**Satz:** *Ein beschränkter, konvexer Körper $l$ des $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt kann durch ein Parallelogramm so umschrieben werden, dass für das Verhältnis $\lambda$ der*

*Strecken auf einem Strahl vom Mittelpunkt zum Rand von $l$ bzw. zum Parallelogramm gilt:*

$$\frac{2}{3} \leqq \lambda \leqq 1.$$

Der Wert 1 wird natürlich angenommen im Falle eines Parallelogramms, der Wert $\frac{2}{3}$ beim regelmässigen Sechseck. Im letzten Fall (siehe Fig. 1) hat man




Figur 1

wegen der Symmetrien nur zwei Möglichkeiten zu überprüfen: die Parallelogramme $E_1E_2E_1'E_2'$ und $F_1F_2F_1'F_2'$. Für spätere Vergleichsmöglichkeiten sind noch der Inkreis und der Umkreis eingezeichnet. Auch im folgenden bezeichne ein Buchstabe mit $'$ den punktsymmetrischen Punkt zum Ursprung. Für die Definition der Standardbegriffe siehe «Theorie der konvexen Körper» von T. Bonnesen und W. Fenchel [2].
Für den Beweis wird der Begriff eines **Maximumsbereichs** benützt. Dieser Begriff wurde von Felix Behrend eingeführt, der auch die folgenden drei Sätze bewies [1].

Sei $K$ die Menge aller konvexen Körper des $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt, $L_1 \subset K$ die Klasse der Affintransformierten eines $l_0 \in K$. Für geeignet gewählte Funktionen $g: K \to \mathbb{R}_+$ existiert ein $l_1 \in L_1$, so dass $g(l_1) = \max\{g(l): l \in L_1\}$. $l_1$ wird **Maximumsbereich** von $l_0$ bzgl. g genannt. Behrend betrachtet solche g, die auf Affininvarianten führen.
Sei im folgenden $g(l) := b/a$, wo b die Dicke und d der Durchmesser von $l$ ist. $g(l)$ ist eine positive Zahl und nach oben durch 1 beschränkt.

**Satz 1.** *Zu jedem $l \in K$ existiert (mindestens) ein Maximumsbereich $l_1$ bzgl. g.*

Behrend bemerkt [1, S. 731], dass dies aus dem Auswahlsatz von Blaschke folgt.

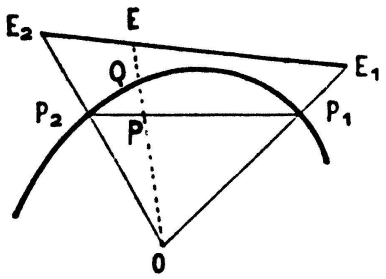
**Satz 2.** *Ist $l_1$ ein Maximumsbereich bzgl. g, so besitzt $l_1$ ein Paar von Sehnen $\delta_1$, $\delta_2$ der Länge d (= Durchmesser) und ein Paar von Sehnen $\beta_1$, $\beta_2$ der Länge b (= Dicke), deren Richtungen sich gegenseitig trennen.*

Unter «Richtung» ist der Winkel (mod $\pi$) der Geraden, auf der die Strecke liegt, mit der positiven x-Achse zu verstehen (nach Einführung eines geeigneten Koordinatensystems).
Zum Beispiel, falls $l = e$ eine Ellipse ist, dann ist offenbar $l_1 = k$ ein Kreis, mit $g(k) = 1$. Ist $l = p$ ein Parallelogramm, dann ist $l_1 = q$ ein Quadrat und es gilt: $g(q) = 1/\sqrt{2}$.

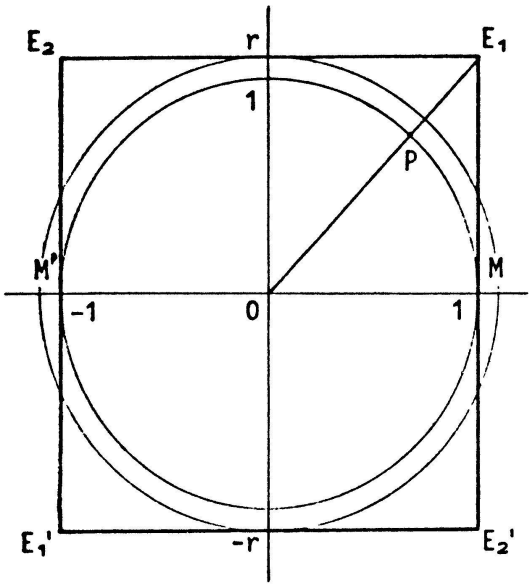
**Satz 3.** *Sei q ein Quadrat, k ein Kreis und $l_1$ ein davon verschiedener Maximumsbereich. Dann gilt:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = g(q) < g(l_1) < g(k) = 1 .$$

Daraus kann man auch das Ergebnis von W. Meixner $\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq 1$ herleiten.
Wegen der Invarianz des Verhältnisses $\lambda$ bei linearen Transformationen, genügt es, ein Parallelogramm für jeden möglichen punktsymmetrischen Maximumsbereich bzgl. g zu finden.
Sei $l_1$ ein solcher Maximumsbereich. Offensichtlich hat $l_1$ einen Mittelpunkt. Sei dieser in 0. $\delta_1$, $\delta_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ in Satz 2 können so gewählt werden, dass sie durch 0 gehen. Ohne Einschränkung $\beta_1$ liege auf der x-Achse zwischen den Punkten $M := (1, 0)$ und $M' := (-1, 0)$. Wegen Satz 3 hat jeder Maximumsbereich einen Umkreis mit $1 \leqq r \leqq \sqrt{2}$. Wegen Satz 2 berührt $l_1$ den Umkreis mindestens in 2 punktsymmetrischen Paaren von Punkten und ebenso den Inkreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1.
Die Tangente in M an den Inkreis schneide den Umkreis in $A := (1, a)$ mit $a = \sqrt{r^2 - 1}$. a nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, da $1 \leqq r \leqq \sqrt{2}$.
Es genügt $\lambda$ längs der 2 Richtungen zu den Ecken des umschreibenden Parallelogramms zu überprüfen, weil $\lambda$ dort minimal wird, wie man leicht aus Fig. 2 sieht.
Bei der Konstruktion des umschreibenden Parallelogramms werden zwei Fälle unterschieden: I) $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ und II) $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$. Während Fall I sich sofort erledigt, ist Fall II etwas langwierig. Da $\lambda = \frac{2}{3}$ im Fall des regelmässigen Sechsecks angenommen wird und daher nicht zu überbieten ist, wird eine Ecke so festgelegt, dass dort $\lambda = \frac{2}{3}$ ist. Damit gelingt es, Polynome höheren Grades zu vermeiden und den damit verbundenen Aufwand bei der Suche nach Nullstellen.
I. Für $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ umschreibt das von den Tangenten in den Punkten $(1, 0)$, $(0, r)$, $(-1, 0)$ und $(0, -r)$ begrenzte Rechteck $E_1E_2E_1'E_2'$ den Körper $l_1$ (siehe Fig. 3). Hier sei $E_1$ der Schnittpunkt der Tangenten durch $(1, 0)$ und $(0, r)$. $OE_1$ schneide den Einheitskreis in P. Dann genügt es zu zeigen, dass




Figur 2

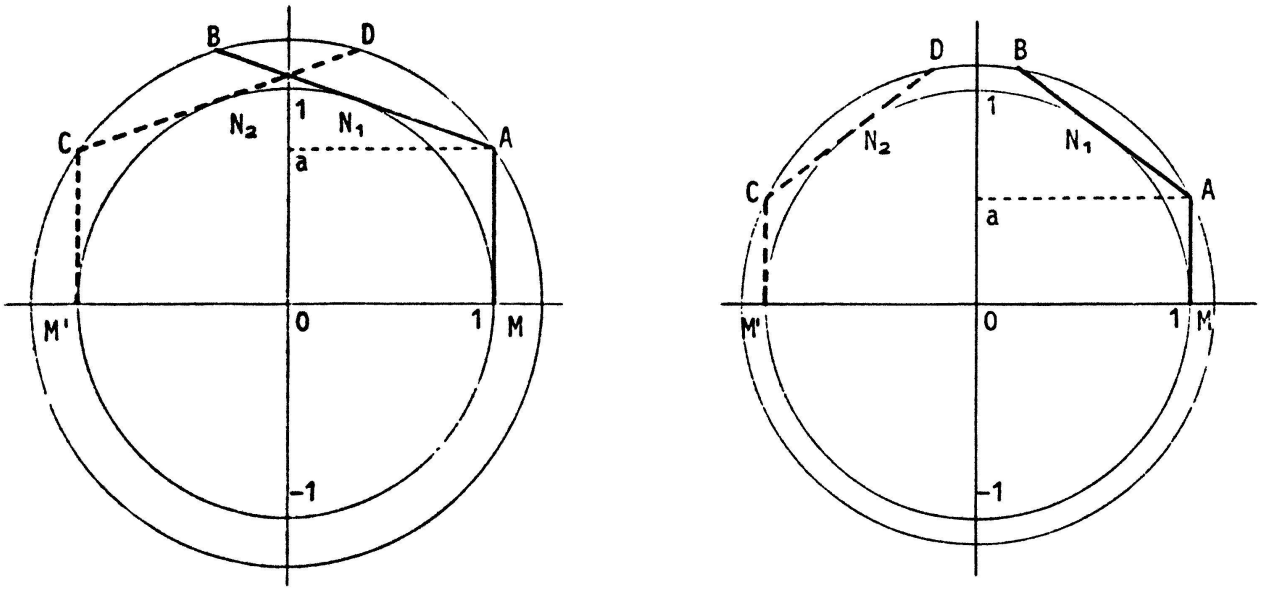



Figur 3

$\frac{OP}{OE_1} \geqq \frac{2}{3}$. Da aber $OE_1 = \sqrt{1+r^2} = \sqrt{2+a^2}$ und $OP = 1$, folgt $\frac{OP}{OE_1} \geqq \frac{2}{3} \Leftrightarrow$ $9 \geqq 4(2+a^2) \Leftrightarrow 1 \geqq 4a^2 \Leftrightarrow |a| \leqq \frac{1}{2}$.

II. Sei $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$. Von A lege man die 2. Tangente an den Inkreis (Berührungspunkt $N_1$). Dieser schneide den Umkreis nochmals in B (siehe Fig. 4). Man findet $B = \frac{1}{1+a^2}(1-3a^2, a(3-a^2))$.

Sei D der Spiegelpunkt von B und $N_2$ der Spiegelpunkt von $N_1$, bzgl. der y-Achse. Sei $C := (-1, a)$. Für $a = 1/\sqrt{3}$ ist $B = D$ und $ABCA'B'C'$ ist ein regelmässiges Sechseck. Für $1/\sqrt{3} < a \leqq 1$ liegt B im 2. Quadranten, für $0 \leqq a < 1/\sqrt{3}$ im 1. Quadranten.




Figur 4

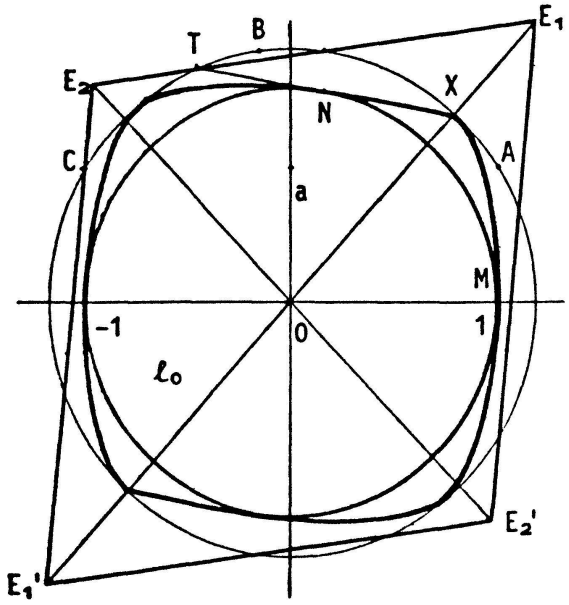
MA und M'C liegen auf Stützgeraden von $l_1$. Jeweils ein Endpunkt der beiden Sehnen $\delta_1$ und $\delta_2$ aus Satz 2 liegt dann auf dem Bogen AC des Umkreises, auf dem auch B liegt. Da aber die Richtung der Sehne $\beta_2$, die Richtungen von $\delta_1$ und $\delta_2$ trennt, berührt $\beta_2$ den Inkreis (und $l_1$) in einem Punkt N, der zwischen $N_1$ und $N_2$ liegt. Die Tangente in N an den Inkreis schneidet den Umkreis zwischen A und D und zwischen B und C. Also berührt $l_1$ den Umkreis mindestens einmal auf dem Bogen AD und auf dem Bogen BC im oberen Halbkreis.

Dann gibt es zwei Möglichkeiten: $\sphericalangle MON \leqq \pi/2$ und $\sphericalangle MON > \pi/2$. Es genügt, den Fall $\sphericalangle MON \leqq \pi/2$ zu betrachten, da der 2. Fall durch eine Spiegelung an der y-Achse in den 1. überführt werden kann. Sei $X := (x, y)$ ein Berührungspunkt von $l_1$ mit dem Umkreis zwischen A und D. Für die Grenzlage $\sphericalangle MON = \pi/2$ erhält man als letzten möglichen Berührungspunkt von $l_1$ mit dem Umkreis zwischen A und D den Punkt $(a, 1) =: A_1$. Daher gilt $a \leqq x \leqq 1$ und $a \leqq y \leqq 1$. Von X lege man die Tangente an den Inkreis, deren Berührungspunkt zwischen $N_1$ und $N_2$ liegt. Diese schneide den Umkreis wieder in T. Hier kann $l_1$ den Umkreis frühestens wieder berühren. Sei $E_1 = \frac{3}{2}\overrightarrow{OX}$.

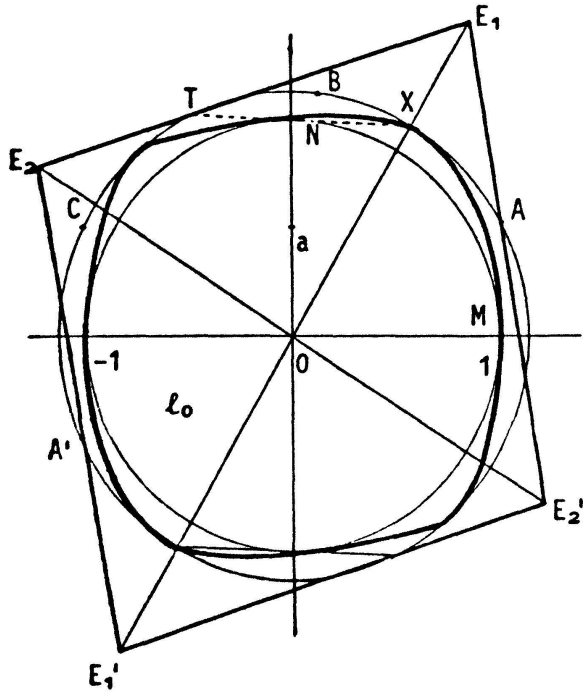
Von $E_1$ und $E_1'$ aus wird das $l_1$ umschreibende Parallelogramm konstruiert. Dabei werden 2 Fälle unterschieden.

Falls $x \geqq \frac{2}{3}$, sei $E_2$ der Schnittpunkt von $E_1T$ und $E_1'C$ (siehe Fig. 5). Falls $x < \frac{2}{3}$, sei $E_2$ der Schnittpunkt von $E_1T$ und $E_1'A'$ (siehe Fig. 6). Der letzte Fall tritt nur für $a \leqq \frac{2}{3}$ ein.

Damit liegt $l_1$ im Parallelogramm $E_1E_2E_1'E_2'$. Zum **Beweis** betrachte man die Grenzlagen von X, nämlich A und $A_1$. Seien $F_1F_2F_1'F_2'$ und $H_1H_2H_1'H_2'$ die zugehörigen Parallelogramme, also mit $F_1 := \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ und $H_1 := \frac{3}{2}\overrightarrow{OA_1}$ (siehe

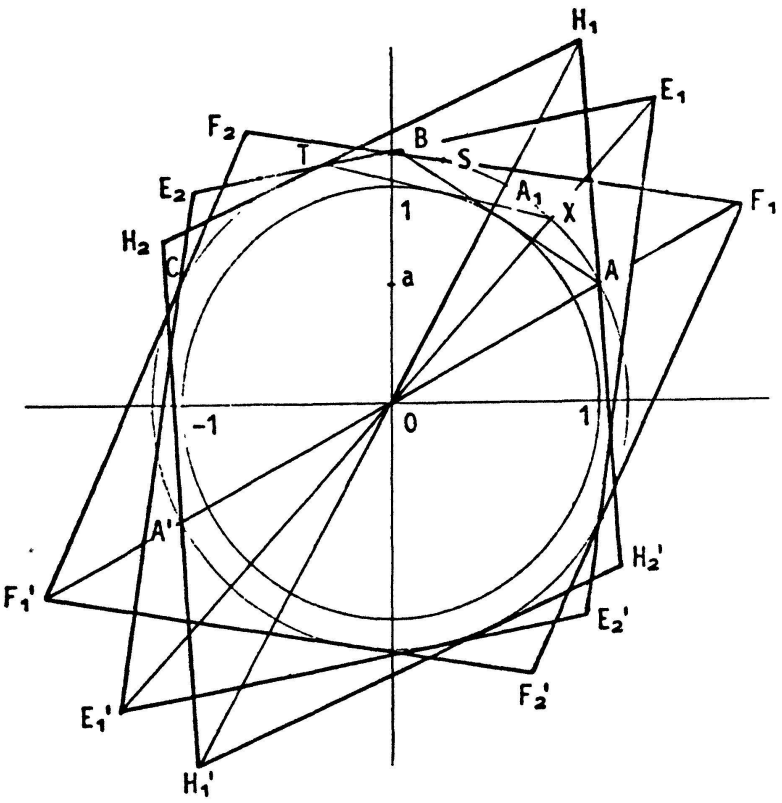


Figur 5



Figur 6

Fig. 7). Der Winkel $\sphericalangle F_1AH_1 < \pi/2$ für $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$, denn das Skalarprodukt $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AH_1} = \frac{1}{2}(-a^2 + 3a - 1) > 0$ für $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, also auch für $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$. Somit schneidet $H_1A$ den Umkreis nicht zwischen $H_1$ und A. Für X zwischen A und $A_1$ schneidet $E_1E_2'$ den Umkreis nicht im Sektor AOX. Die Gerade $F_1B$ schneidet den Umkreis in B. Für den 2. Schnittpunkt S mit dem Umkreis erhält man $S = \frac{1}{25a^2+1}(15a^2 - 1, a(25a^2 + 9))$. Durch Vergleich der 1. Koordinaten etwa, sieht man, dass S zwischen B und $F_1$ liegt für $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$. Für beliebiges X schneidet $E_1T$ den Umkreis auch nur zwischen $E_1$ und T, dem die Dreiecke $AF_1B$ und $XE_1T$ sind kongruent. Somit ist sichergestellt, dass im Sektor $MOE_2$ $l_1$ im Parallelogramm enthalten ist für beliebiges X. $F_2$ hat die Koordinaten $\frac{6a}{1+5a^2}(-a, 1)$. Ferner gilt $\sphericalangle OCF_2 > \pi/2$, denn $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CF_2} = \frac{1-a^2}{1+5a^2}(1 - 5a^2) < 0$ für $1 > a > 1/\sqrt{5}$.

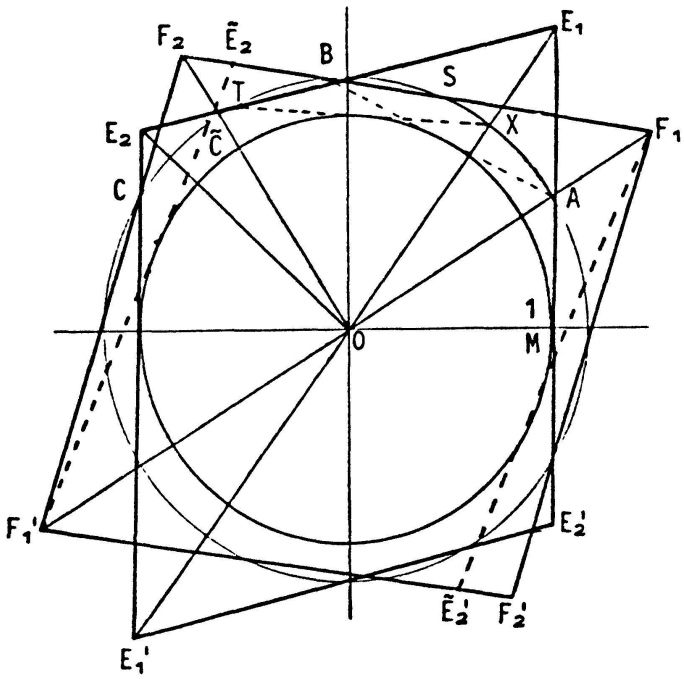



Figur 7

Also schneidet $F_2C$ den Umkreis nicht zwischen C und $F_2$ und für X zwischen A und $A_1$ schneidet $E_2E_1'$ den Umkreis erst recht nicht im Sektor $E_2OC$. Im Sektor COM′ kann es sowieso zu keinen Überschneidungen kommen zwischen $l_1$ und dem oben konstruierten Parallelogramm. Wegen der Punkt-

symmetrie kommt es auch zu keinen Überschneidungen in der unteren Halbebene.
Nun wird gezeigt, dass das Parallelogramm $E_1E_2E_1'E_2'$ die Bedingung $\lambda \geqq \frac{2}{3}$ in allen Richtungen erfüllt.

**1. Fall:** $x \geqq \frac{2}{3}$ (bei festem $a \in [\frac{1}{2}, 1]$). In Richtung $\overrightarrow{OE_1}$ ist $\lambda = \frac{2}{3}$ nach Konstruktion. Es bleibt $\lambda$ in Richtung $\overrightarrow{OE_2}$ (hiernach mit $\lambda_2$ bezeichnet) abzuschätzen.
Man drehe das Parallelogramm $E_1E_2E_1'E_2'$ um O um $\sphericalangle XOA$, so dass $E_1 \mapsto F_1$, $E_1' \mapsto F_1'$, $T \mapsto B$, $X \mapsto A$, $C \mapsto \tilde{C}$, $E_2 \mapsto \tilde{E}_2$. Für $\tilde{C}$, $\tilde{E}_2$ sei dies die Definition. Es ist $\sphericalangle TOB = \sphericalangle XOA$ und T liegt zwischen C und B auf dem Umkreis. Damit liegt $\tilde{C}$ zwischen C und B und $\tilde{E}_2$ zwischen $F_2$ und B (siehe Fig. 8).




Figur 8

Die Senkrechte von O auf $F_1F_2$ halbiert BS (S zwischen B und $F_1$, siehe oben). $\Rightarrow OE_2 = O\tilde{E}_2 < OF_2$. Weiter gilt für $a \geqq 0$:

$$OF_2 = \frac{6a}{1+5a^2}\sqrt{1+a^2} \leqq \frac{3}{2} \Leftrightarrow (3a^2-1)^2 \geqq 0\,.$$

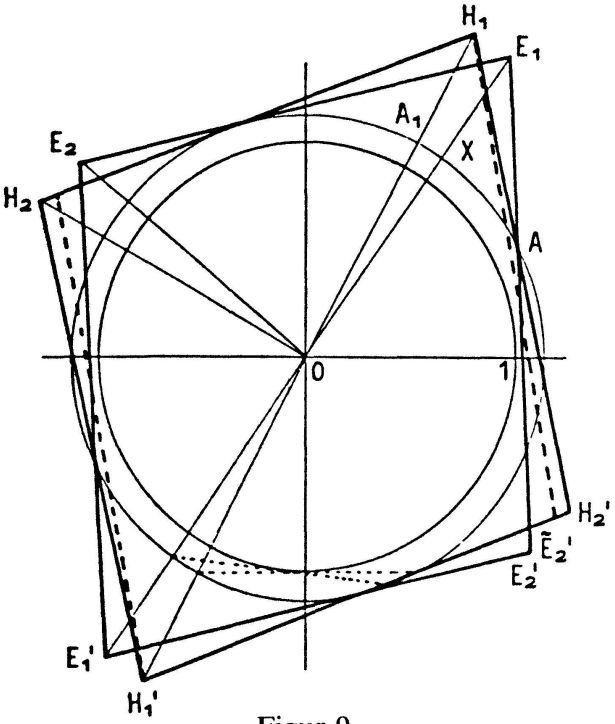
Daher gilt

$$\lambda_2 \geqq \frac{1}{OF_2} \geqq \frac{2}{3}\,.$$

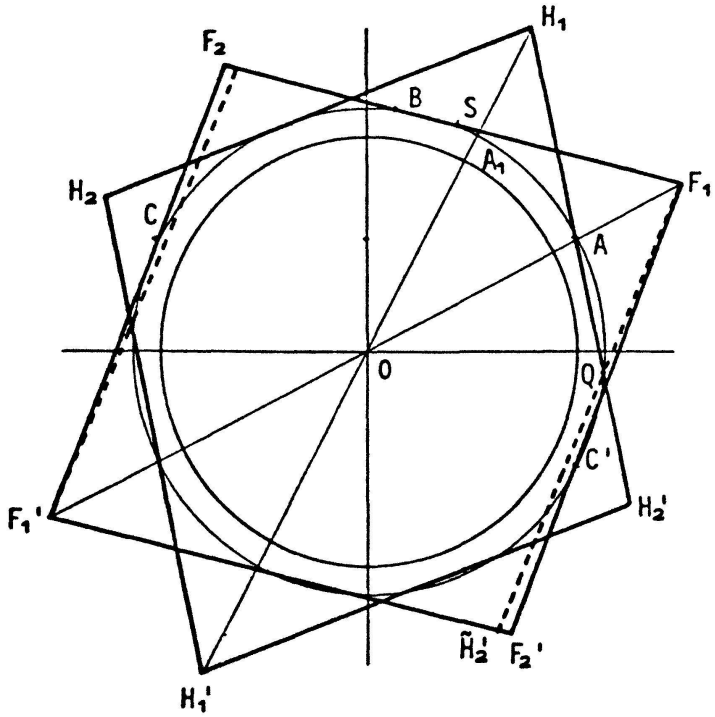
Beachte, dass Gleichheit nur im Falle $a = 1/\sqrt{3}$ gilt (der Fall des regelmässigen Sechsecks).

**2. Fall:** $\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{2}{3}$ (bei festem $a \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$). Ähnlich wie oben, drehe man $E_1E_2E_1'E_2'$ um O aber um $\sphericalangle XOA_1$, so dass $E_1 \mapsto H_1$, $E_1' \mapsto H_1'$, $X \mapsto A_1$, $E_2' \mapsto \tilde{E}_2'$ (siehe Fig. 9). Da $\widehat{XA} < \widehat{A_1A}$, kommt $\tilde{E}_2'$ (der Bildpunkt von $E_2'$) zwischen $H_2'$ und $H_1'$ zu liegen.

$$\Rightarrow OE_2 = OE_2' = O\tilde{E}_2' < OH_2' = OH_2.$$




Figur 9




Figur 10

Wenn nun gezeigt ist, dass $OH_2 < OF_2$ ist, sind wir fertig. Eine Drehung um O, die $A_1 \mapsto A$ überführt, soll dies beweisen. Dabei werde $A \mapsto Q$ und $H_2' \mapsto \tilde{H}_2'$ abgebildet (siehe Fig. 10). $\Rightarrow \widehat{AQ} = \widehat{A_1A}$.
Weiter gilt, dass $\widehat{AS} > \widehat{AA_1}$, denn die 2. Komponente von S

$$s_2 := \frac{a\,(25\,a^2+9)}{25\,a^2+1} > 1 \Leftrightarrow f(a) := 25\,a^3 - 25\,a^2 + 9\,a - 1 > 0.$$

Wegen $f'(a) = 75\,a^2 - 50\,a + 9 > 0$ für alle a, ist f(a) streng monoton steigend.
Da $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$, ist auch $s_2 > 1$. Damit gilt auch $\sphericalangle OF_1S > \sphericalangle OF_1A_1$. Nun ist $\sphericalangle OF_1A_1 = \sphericalangle QF_1O$ (nach Konstruktion) und $\sphericalangle OF_1S = \sphericalangle C'F_1O$, da $AC'$ auch eine Tangente an den Inkreis ist. $\Rightarrow \sphericalangle QF_1O < \sphericalangle C'F_1O$ und damit liegt $\tilde{H}_2'$ zwischen $F_1'$ und $F_2'$

$$\Rightarrow OH_2 = OH_2' < OF_2' = OF_2.$$

Das so konstruierte Parallelogramm ist meistens nicht das bestmögliche. In vielen Fällen würde man schon ein besseres erhalten, wenn man das Verhältnis $\lambda$ auf den beiden Richtungen $OF_1$, $OF_2$ gleich machen würde. Der Rechenaufwand nimmt allerdings erheblich zu. Weiter wird $l_1$ vorausgesetzt als gegeben. Die Frage, wie man aus einem gegebenen $l$ einen zugehörigen Maximumsbereich $l_1$ erhält, ist offen. Behrend hat gezeigt, dass die Trennungseigenschaft von Satz 2 auch hinreichend ist für einen Maximumsbereich und dass dieser eindeutig ist [1, S. 730].
Unser Satz besagt, dass es zu einem punktsymmetrischen, konvexen Körper $l$ des $\mathbb{R}^2$ und einem Parallelogramm $p$, mit Mittelpunkt jeweils im Ursprung, einen Isomorphismus $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, so dass

$$(*)\quad \lambda p \subset T l \subset p$$

mit $\frac{2}{3} \leqq \lambda \leqq 1$. Mit einem Kompaktheitsargument folgt das

**Korollar.** *Es gibt einen Isomorphismus* $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *so dass in* (*) $\lambda$ *maximal wird.*

Nimmt man statt $p$ einen anderen punktsymmetrischen, konvexen Körper $l'$ des $\mathbb{R}^2$, so gibt es ebenfalls ein maximales $\lambda$, so dass $\lambda\, l' \subset T l \subset l'$, da $l$ und $l'$ kompakt sind. Für einen ausführlichen Beweis siehe etwa Macbeath [5, S. 56]. Nur sind im allgemeinen keine Schranken für $\lambda$ bekannt. Falls $l'$ eine Ellipse ist, dann gilt $1/\sqrt{2} \leqq \lambda \leqq 1$ [4, S. 203]. Sei $\varrho := 1/\lambda$ und $K_0$ die Menge der konvexen Körper mit Mittelpunkt im Ursprung. Ähnlich wie bei Dvoretzky [3, S. 156] definieren wir eine Pseudometrik auf $K_0$

$$d(l, l') := \inf\{\log \varrho\colon l' \subset T l \subset \varrho l',\quad T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ ein Isomorphismus}\}.$$

Seien X und Y normierte Räume mit dem $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum und mit $l$ bzw. $l'$ als Eichkörper der Norm von X bzw. Y und definiere

$$d(X, Y) := \inf\{\log \|T\| \cdot \|T^{-1}\|\colon T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ ein Isomorphismus}\} = d(l, l').$$

Für eine ausführliche Beschreibung siehe Schäffer [7, S. 72]. $d(X, Y) = 0$, falls $l$ und $l'$ den gleichen Maximumsbereich haben. Dann gibt es eine Isometrie zwischen X und Y. Isometrie erzeugt Äquivalenzklassen auf $X_2$ (der Menge aller normierten Räume mit dem $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum), die wir Isometrieklassen nennen (Schäffer nennt sie Kongruenzklassen). Ein Repräsentantensystem für diese Isometrieklassen ist die Menge der normierten Räume, die einen Maximumsbereich als Eichkörper der Norm besitzen. Auf der Menge der Isometrieklassen $\tilde{X}_2$ wird durch $\tilde{d}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d(X, Y)$ eine Metrik definiert. Sei $\tilde{P}$ die Klasse der normierten Räume, die ein Parallelogramm als Eichkörper besitzen. Dann ist aufgrund unseres Satzes $0 \leqq \tilde{d}(\tilde{X}, \tilde{P}) \leqq \log \frac{3}{2}$. Für die Klasse $\tilde{E}$ mit Ellipsen als Eichkörper gilt $0 \leqq \tilde{d}(\tilde{X}, \tilde{E}) \leqq \log \sqrt{2}$.

Ich möchte H. Meixner ganz herzlich danken für alle seine hilfreichen Anregungen.

Konrad Penzkofer, TU München

LITERATURVERZEICHNIS

1 Felix Behrend: Über einige Affininvarianten konvexer Bereiche. Math. Ann. *113*, 713–747 (1937).
2 T. Bonnesen und W. Fenchel: Chelsea Publishing Company Bronx, New York 1971.
3 A. Dvoretzky: Some results on convex bodies and Banach spaces. Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces, S. 123–160. Jerusalem Academic Press 1961.
4 Fritz John: Extremum problems with inequalities as subsibiary conditions. Courant Anniversary Volume 1948, S. 187–204.
5 A. M. Macbeath: A compactness theorem for affine equivalence-classes of convex regions. Canad. J. Math. *3*, 54–61 (1961).
6 Werner Meixner: Inequalities relating norms and corresponding equivalent order unit norms. To appear.
7 J. J. Schäffer: Inner diameter, perimeter, and girth of spheres. Math. Ann. *173*, 59–82 (1967).

© 1984 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/84/030057-10$1.50 + 0.20/0