

# Drei- und Viereckspaare, für deren Drei- und Vierecke jeweils zwei Steiner-Symmetrisierungen übereinstimmen

Autor(en): **Giering, O.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **40 (1985)**

Heft 1

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38825>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 40

Nr. 1

Seiten 1–32

Basel, 10. Januar 1985

## Drei- und Viereckspaare, für deren Drei- und Vierecke jeweils zwei Steiner-Symmetrisierungen übereinstimmen

In der euklidischen Ebene sei  $A$  ein *Eibereich* (ebener konvexer Körper mit inneren Punkten) und  $g$  eine Gerade. Jede zu  $g$  senkrechte Gerade, die  $A$  in inneren Punkten trifft, hat mit  $A$  eine Strecke gemeinsam. Verschiebt man diese Strecken in ihren Geraden (*Symmetrisierungsgeraden*), bis ihre Mittelpunkte auf  $g$  liegen, dann erfüllt die Gesamtheit der so erhaltenen Strecken einen Eibereich  $A'$ , die *Steiner-Symmetrisierung* (kurz *Symmetrisierung*) von  $A$  in Richtung  $s'$  ( $s' \perp g$ )<sup>1)</sup>.

Das Problem der Rekonstruktion eines Eibereichs  $A$  aus gewissen Symmetrisierungen von  $A$  wurde in jüngerer Zeit in verschiedenen Varianten untersucht [2–5], [8–10]<sup>2)</sup>. Insbesondere wurde gezeigt [3, 5, 8]: 1. Ein gegebener Eibereich  $A$  ist durch mindestens zwei, jedoch höchstens drei geeignete Symmetrisierungen von  $A$  eindeutig bestimmt. 2. Wird ein Eibereich  $A$  in zwei verschiedenen Richtungen  $s'$  und  $s''$  symmetrisiert und sind die  $A$  einbeschriebenen Sehnenzüge mit abwechselnd zu  $s'$  und  $s''$  parallelen Sehnen stets Parallelogramme, dann ist  $A$  durch seine  $s'$ - und  $s''$ -Symmetrisierungen  $A'$ ,  $A''$  eindeutig bestimmt.

Die Frage, inwieweit ein vorgegebener Eibereich  $A$  durch genau zwei verschiedene Symmetrisierungen  $A'$ ,  $A''$  von  $A$  bestimmt wird, ist ersichtlich invariant gegenüber einer Scherung der Ebene, die das  $A$  umbeschriebene Parallelogramm aus den  $s'$ - und  $s''$ -parallelen Stützgeraden von  $A$  in ein Rechteck überführt sowie gegenüber einer senkrechten Affinität, die dieses Rechteck auf ein Quadrat abbildet. Ohne Einschränkung wird daher vorausgesetzt, dass  $A'$ ,  $A''$  zwei Symmetrisierungen eines Eibereichs  $A$  sind, die zu orthogonalen Symmetrisierungsrichtungen  $s'$ ,  $s''$  gehören und ein  $A$  umbeschriebenes Quadrat bestimmen (*Normalgestalt* von  $A$  bezüglich  $s'$  und  $s''$ ,  $s' \perp s''$ ).

Sind  $A'$ ,  $A''$  zwei verschiedene Symmetrisierungen eines Eibereichs  $A$ , und ist eine davon (etwa  $A''$ ) zur Mittelparallelen  $m''$  der beiden  $s''$ -parallelen Stützgeraden von  $A$  symmetrisch und halbiert  $m''$  nicht alle  $s'$ -Sehnen von  $A$ , so wird  $A$  durch  $A'$  und  $A''$  nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr besitzt der aus  $A$  durch Spiegelung an  $m''$  entste-

<sup>1)</sup> Nach dem Cavalierischen Prinzip ist  $A'$  mit  $A$  flächengleich. – Steiner [6, 7] hat diese Symmetrisierung zur Behandlung des isoperimetrischen Problems eingeführt, Blaschke [1] hat ihre Eigenschaften ausführlich behandelt. Wird ein Bereich  $B$  der euklidischen Ebene von zu  $g$  senkrechten Geraden in *endlich vielen Strecken* geschnitten, so wird bei der Symmetrisierung von  $B$  in Richtung  $s'$  die *Streckensumme* gebildet und in der Symmetrisierungsgeraden symmetrisch zu  $g$  verschoben (Fig. 5).

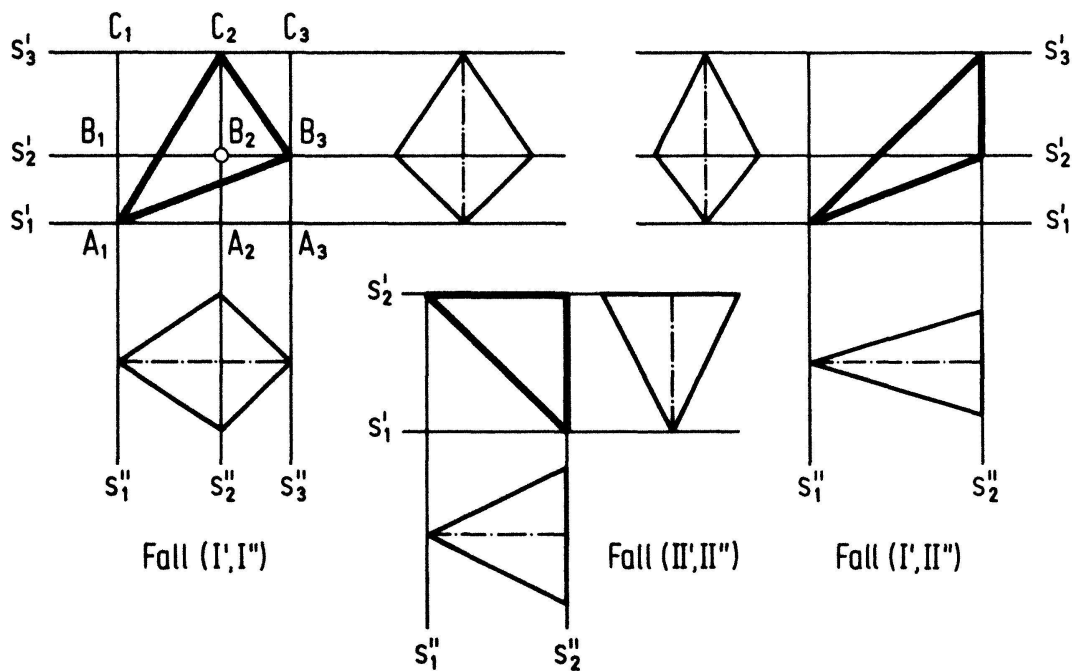
<sup>2)</sup> Das Problem ändert sich nicht wesentlich, wenn anstelle einer Symmetrisierung  $A'$  ein Bereich  $B$  tritt, der von jeder Symmetrisierungsgeraden in gleichlangen Strecken wie  $A$  geschnitten wird oder wenn  $A'$  durch die entsprechende *Sehnenfunktion* ersetzt wird. – Rekonstruktionsprobleme verschiedener Art haben seit langem praktische Bedeutung, so in der darstellenden Geometrie, der Trilateration, der Tomographie und Tomometrie.

hende Eibereich  $B$  wie  $A$  die Symmetrisierungen  $A'$  und  $A''^3$ ). Wir fragen nun: *Liegen (in Normalgestalt) alle Eibereiche  $A, B$  mit gleichen  $s'$ - und  $s''$ -Symmetrisierungen ( $A' = B', A'' = B''$ ) zueinander symmetrisch bezüglich einer Achse mit Symmetrisierungsrichtung?*

Als Beitrag zu diesem Thema bestimmen wir in Abschnitt 1 alle (einem Quadrat einbeschriebenen) Dreieckspaare, deren Dreiecke in den Richtungen  $s', s''$  der Quadratseiten dieselben Symmetrisierungen besitzen. Wir nennen solche Dreieckspaare *S-Dreieckspaare* und ihre Dreiecke *S-Dreiecke*. Andere Figuren, die möglicherweise dieselben  $s'$ - und  $s''$ -Symmetrisierungen wie ein beteiligtes Dreieck besitzen, bleiben ausser Betracht. Es ergeben sich fünf verschiedene Typen von *S-Dreieckspaaren* (Satz 1); diese sind entweder axial- oder nicht axialsymmetrisch. Die nicht axialsymmetrischen *S-Dreieckspaare* liegen jedoch in einer einparametrig axialsymmetrischen Schar von *S-Dreieckspaaren*.

In Abschnitt 2 wird die weitaus umfangreichere Frage nach den entsprechend erklärten *S-Viereckspaaren* angeschnitten. Dabei werden zwei einparametrig axialsymmetrische Scharen von *S-Viereckspaaren* angegeben, deren einzelne *S-Viereckspaare* (bis auf je ein Exemplar) nicht axialsymmetrisch sind (Satz 2 und Satz 3).

1. Ist eine  $s'$ -Symmetrisierung eines Dreiecks gegeben, dann liegen seine drei Ecken auf drei Symmetrisierungsgeraden  $s'_1, s'_2, s'_3$  (*Ecken-Symmetrisierungsgeraden*). Entweder sind  $s'_1, s'_2, s'_3$  paarweise verschieden (Möglichkeit I') oder zwei der drei Ecken-Symmetrisierungsgeraden – etwa  $s'_2$  und  $s'_3$  – fallen zusammen (Möglichkeit II'). Bezüglich der  $s''$ -Symmetrisierung eines Dreiecks bestehen die entsprechenden Möglichkeiten I'' und II''. Ein festes Dreieck fällt daher im Hinblick auf eine  $s'$ - und  $s''$ -Symmetrisierung unter genau einen der drei Fälle (I', I''), (I', II''), (II', II'') (Fig. 1). Fall (I'', II') ist äquivalent zu Fall (I', II'').



Figur 1

<sup>3)</sup> Beispiel: Man umschreibe einer Ellipse  $A$  ein Quadrat und spiegle  $A$  an der Mittelparallelen gegenüberliegenden Quadratseiten.

Wir betrachten zunächst Fall (I', I''). Wir bezeichnen dabei die neun Schnittpunkte der sechs verschiedenen Ecken-Symmetrisierungsgeraden  $s'_i, s''_i (i = 1, 2, 3)$  wie in Figur 1 mit indizierten Grossbuchstaben. Auf jeder der vier  $s'$ - bzw.  $s''$ -Stützgeraden  $s'_1, s'_3, s''_1, s''_3$  liegt genau eine Dreiecksecke. Folglich liegt stets mindestens eine Ecke im Schnitt einer  $s'$ - mit einer  $s''$ -Stützgeraden. Die  $s'$ -Symmetrisierung eines Dreiecks aus Fall (I', I'') ist daher ein Drachenviereck; von seinen Ecken liegen zwei auf  $s'_2$ , und je eine Ecke liegt auf  $s'_1$  bzw.  $s'_3$ . Entsprechendes gilt für seine  $s''$ -Symmetrisierung. Umgekehrt gehört jedes Dreieck mit Drachenvierecken als  $s'$ - und  $s''$ -Symmetrisierungen zu Fall (I', I''). Zu untersuchen ist nun, wann zwei verschiedene Dreiecke aus Fall (I', I'') dieselben  $s'$ - und  $s''$ -Symmetrisierungen besitzen. Dafür ist notwendig und hinreichend, dass  $s'_i, s''_i (i = 1, 2, 3)$  Ecken-Symmetrisierungsgeraden für beide Dreiecke sind und ihre  $s'_2$ - (und  $s''_2$ ) Sehnen gleiche Länge besitzen.

Die Ecken der dafür in Frage kommenden Dreiecke liegen notwendig in der Punktmenge  $\{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3\}$ . Es handelt sich also um die sechs Dreiecke:

$$A_1B_2C_3, A_1C_2B_3, B_1A_2C_3, B_1C_2A_3, C_1B_2A_3, C_1A_2B_3. \tag{1}$$

Aus den Dreiecken (1) lassen sich 15 verschiedene Paare bilden. Jedes dieser Dreieckspaare lässt sich ohne Bezeichnung seiner Ecken betrachten. Die Bezeichnung seiner Ecken kann dann auf vier verschiedene Arten nach Figur 1 erfolgen, je nachdem, welche Seite des dem Paar umbeschriebenen Quadrats *unten* liegt. Auf diese Weise erhält man ein und denselben Paar-Typ in verschiedenen Bezeichnungen. Wie man leicht feststellt, lassen sich die aus (1) gebildeten 15 Dreieckspaare in die folgenden fünf Gruppen (2a)–(2e) derart aufteilen, dass jede Gruppe nur ein und denselben Paar-Typ (*Typ A* bis *Typ E*, jedoch in verschiedenen Bezeichnungen) enthält:

$$(A_1B_2C_3, A_1C_2B_3), (A_1B_2C_3, B_1A_2C_3), (B_1C_2A_3, C_1B_2A_3), (C_1B_2A_3, C_1A_2B_3), \tag{2a}$$

$$(A_1C_2B_3, C_1B_2A_3), (A_1B_2C_3, B_1C_2A_3), (A_1B_2C_3, C_1A_2B_3), (B_1A_2C_3, C_1B_2A_3), \tag{2b}$$

$$(B_1C_2A_3, C_1A_2B_3), (A_1C_2B_3, B_1A_2C_3), \tag{2c}$$

$$(A_1C_2B_3, C_1A_2B_3), (A_1C_2B_3, B_1C_2A_3), (B_1A_2C_3, B_1C_2A_3), (B_1A_2C_3, C_1A_2B_3), \tag{2d}$$

$$(A_1B_2C_3, C_1B_2A_3). \tag{2e}$$

Wir repräsentieren im folgenden Typ A bis Typ E durch die jeweils ersten Dreieckspaare aus (2a)–(2e) und ermitteln die Bedingungen, unter denen die Längen ihrer  $s'_2$ - (und  $s''_2$ ) Sehnen übereinstimmen (*Horizontal- und Vertikalbedingungen*). Da die Dreiecke jedes Dreieckspaars aus (2a)–(2e) bereits dieselben Ecken-Symmetrisierungsgeraden besitzen, kennzeichnen diese Bedingungen die *S*-Dreieckspaare aus Fall (I', I''). Dabei sei das einem Dreieckspaar umbeschriebene Quadrat ohne Einschränkung ein Einheitsquadrat. In diesem habe die Strecke  $A_1A_2$  die Länge  $x$  und die Strecke  $A_1B_1$  die Länge  $y$ .

**Typ A (Fig. 2a):** Bei einem Dreieckspaar  $(A_1B_2C_3, A_1C_2B_3)$  lassen sich weder die Horizontal- noch die Vertikalbedingung erfüllen. Es gibt daher kein *S*-Dreieckspaar  $(A_1B_2C_3, A_1C_2B_3)$ .

**Typ B (Fig. 2b):** Berechnet man unter Verwendung der Hilfspunkte 1, 2, 3, 4 die Längen

der Strecken  $B_1A_1, B_2A_2, B_3A_3, A_2A_3$ , so findet man der Reihe nach  $1 - y, x(1 - y), y(1 - x), 1 - x$ . Horizontal- und Vertikalbedingung lauten dann übereinstimmend

$$xy + x + y - 2 = 0. \quad (3)$$

Ein  $S$ -Dreieckspaar  $(A_1C_2B_3, C_1B_2A_3)$  ist folglich nach (3) dadurch gekennzeichnet, dass der Punkt  $B_2$  im Einheitsquadrat  $A_1C_1C_3A_3$  auf der durch (3) gegebenen gleichseitigen Hyperbel  $h$  liegt<sup>4)</sup>. Der Durchschnitt zweier  $S$ -Dreiecke  $A_1C_2B_3, C_1B_2A_3$  ist ein Fünfeck. Zwei  $S$ -Dreiecke  $A_1C_2B_3, C_1B_2A_3$  liegen dreifach perspektiv. Die Perspektivitätszentren sind der Punkt  $P := C_2A_3 \cap C_1B_3$  sowie die Fernpunkte  $P', P''$  der Symmetrisierungsrichtungen  $s', s''$ . Die zugehörigen Perspektivitätsachsen  $p, p', p''$  inzidieren jeweils mit ihren Perspektivitätszentren (Fig. 2b). Ein  $S$ -Dreieckspaar  $(A_1C_2B_3, C_1B_2A_3)$  ist genau dann axialsymmetrisch, wenn  $A_1, B_2, C_3$  kollinear liegen;  $A_1C_3$  ist Symmetrieachse. Die Gesamtheit aller  $S$ -Dreieckspaare  $(A_1C_2B_3, C_1B_2A_3)$  erfüllt eine einparametrische, zu  $A_1C_3$  axialsymmetrische Schar.

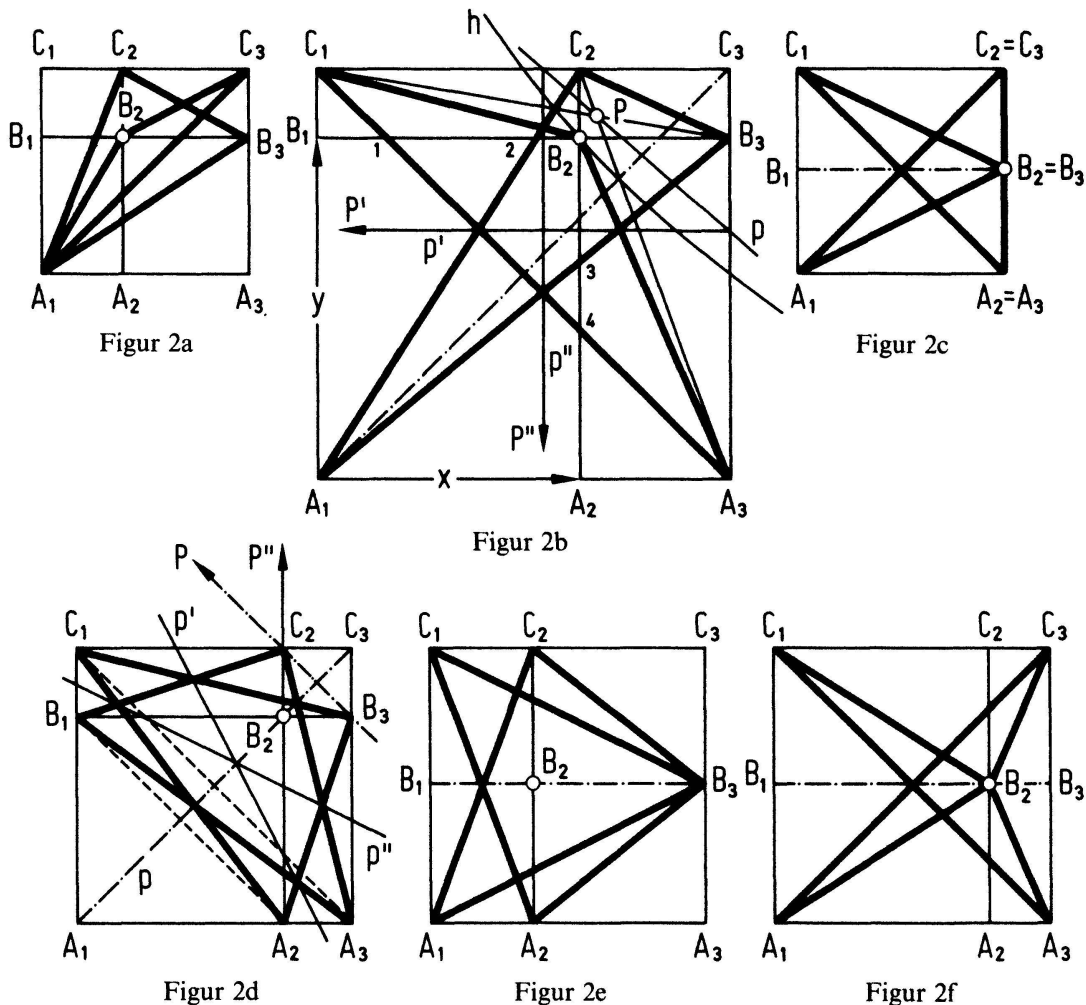
Typ C (Fig. 2c): Horizontal- und Vertikalbedingung führen beide auf  $y = x$ . Demnach ist ein  $S$ -Dreieckspaar  $(B_1C_2A_3, C_1A_2B_3)$  dadurch gekennzeichnet, dass  $B_2$  auf der Diagonale  $A_1C_3$  des Einheitsquadrats  $A_1C_1C_3A_3$  liegt<sup>5)</sup>. Zwei  $S$ -Dreiecke  $B_1C_2A_3, C_1A_2B_3$  besitzen sogar *drei gemeinsame Symmetrisierungen* (gemeinsame  $s'$ -,  $s''$ - und  $C_1A_3$ -Symmetrisierungen) und liegen dreifach perspektiv. Die Perspektivitätszentren  $P, P', P''$  sind die (kollinearen) Fernpunkte der drei Symmetrisierungsrichtungen. Der Durchschnitt zweier  $S$ -Dreiecke  $B_1C_2A_3, C_1A_2B_3$  ist ein Sechseck, dessen Diagonalen auf den (kopunktalen) Perspektivitätsachsen  $p, p', p''$  liegen. Jedes  $S$ -Dreieckspaar  $(B_1C_2A_3, C_1A_2B_3)$  liegt axialsymmetrisch zu  $p = A_1C_3$  sowie schiefsymmetrisch zu  $p'$  bezüglich der  $s'$ -Symmetrisierungsrichtung und schiefsymmetrisch zu  $p''$  bezüglich der  $s''$ -Symmetrisierungsrichtung. Zwei kongruente gleichseitige Dreiecke mit gemeinsamem Mittelpunkt, die um  $\pi/3$  gegeneinander verdreht sind, bilden ein  $S$ -Dreieckspaar vom Typ C.

Typ D (Fig. 2d): Horizontal- und Vertikalbedingung führen beide auf  $2y - 1 = 0$ . Damit liegt jedes  $S$ -Dreieckspaar  $(A_1C_2B_3, C_1A_2B_3)$  axialsymmetrisch zu  $B_1B_3$ . Liegt  $B_2$  ausserhalb des Einheitsquadrats  $A_1C_1C_3A_3$  auf  $B_1B_3$ , so wird ein  $S$ -Dreieckspaar vom Typ E bestimmt, das nicht in Normalgestalt vorliegt. Der Durchschnitt zweier  $S$ -Dreiecke  $A_1C_2B_3, C_1A_2B_3$  ist ein Drachenviereck. Zwei  $S$ -Dreiecke  $A_1C_2B_3, C_1A_2B_3$  liegen in trivialer Weise zweifach perspektiv. Die Perspektivitätszentren  $P', P''$  sind die Fernpunkte der beiden Symmetrisierungsrichtungen. Die zugehörigen Perspektivitätsachsen  $p', p''$  inzidieren mit der Symmetrieachse  $B_1B_3$ ;  $P'$  inzidiert mit  $p', P''$  inzidiert nicht mit  $p''$ .

Typ E (Fig. 2e): Horizontal- und Vertikalbedingung lauten beide  $2y - 1 = 0$ . Folglich liegt jedes  $S$ -Dreieckspaar axialsymmetrisch zu  $B_1B_3$ . Liegt  $B_2$  ausserhalb des Einheitsquadrats  $A_1C_1C_3A_3$  auf  $B_1B_3$ , so wird ein  $S$ -Dreieckspaar vom Typ D – jedoch nicht in Normalgestalt – bestimmt. Der Durchschnitt zweier  $S$ -Dreiecke  $A_1B_2C_3, C_1B_2A_3$  ist ein Drachenviereck. Zwei  $S$ -Dreiecke  $A_1B_2C_3, C_1B_2A_3$  liegen wie bei Typ D in trivialer Weise zweifach perspektiv.

<sup>4)</sup> Liegt  $B_2$  auf der Hyperbel  $h$  ausserhalb des Quadrats  $A_1C_1C_3A_3$ , so wird ebenfalls ein  $S$ -Dreieckspaar vom Typ B bestimmt, jedoch nicht in Normalgestalt.

<sup>5)</sup> Liegt  $B_2$  auf der Geraden  $A_1C_3$  ausserhalb des Quadrats  $A_1C_1C_3A_3$ , so wird ebenfalls ein  $S$ -Dreieckspaar vom Typ C bestimmt. Das beiden Dreiecken umbeschriebene Quadrat ist jedoch kein Einheitsquadrat.



Wir betrachten nun Fall (I', II'') (Fig. 1). Ein Dreieck aus Fall (I', II'') besitzt als  $s'$ -Symmetrisierung ein Drachenviereck und als  $s''$ -Symmetrisierung ein gleichschenkliges Dreieck. Umgekehrt liegt jedes Dreieck mit solchen  $s'$ - und  $s''$ -Symmetrisierungen in Fall (I', II''). Man findet unschwer: Zwei verschiedene Dreiecke aus Fall (I', II'') bilden genau dann ein  $S$ -Dreieckspaar, wenn sie zur Mittelparallelen von  $s'_1$  und  $s'_3$  symmetrisch liegen (Fig. 2f). Damit existieren im Einheitsquadrat  $A_1C_1C_3A_3$  genau zwei  $S$ -Dreieckspaare aus Fall (I', II''), die zur Mittelparallelen der Quadratseiten  $A_1C_1$  und  $A_2C_2 = A_3C_3$  symmetrisch liegen (Typ  $F$ ). Figur 2f stellt eine zwischen Figur 2d und Figur 2e vorhandene Grenzlage dar.

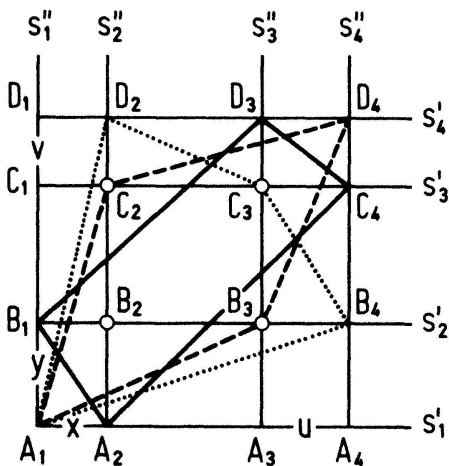
In Fall (II', II'') existieren ersichtlich keine  $S$ -Dreieckspaare.

Zusammenfassend gilt:

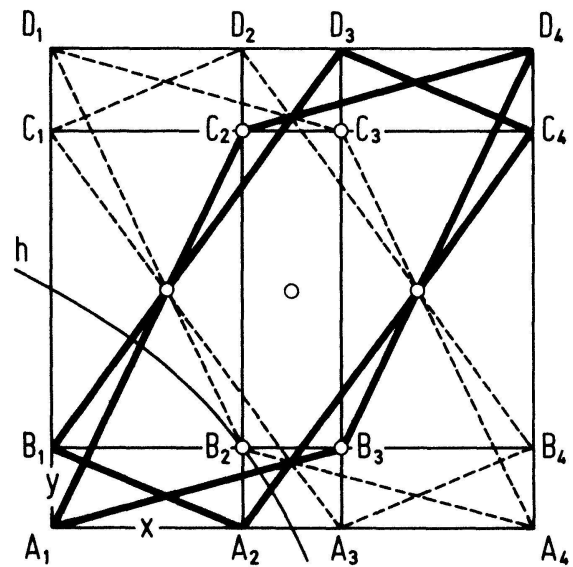
**Satz 1.** Es gibt genau fünf verschiedene Typen (Typ  $B$ –Typ  $F$ ) von  $S$ -Dreieckspaaren in Normalgestalt (dargestellt in Fig. 2b–2f, beschrieben im Text). Typ  $B$ –Typ  $E$  besteht aus je einer axialsymmetrischen einparametrischen Schar von  $S$ -Dreieckspaaren; Typ  $F$  besteht aus zwei  $S$ -Dreieckspaaren. Ein  $S$ -Dreieckspaar vom Typ  $C$ –Typ  $F$  ist axialsymmetrisch; ein  $S$ -Dreieckspaar vom Typ  $B$  ist nur dann axialsymmetrisch, wenn die Dreiecksecken  $A_1, B_2, C_3$  kollinear liegen.

2. Sind eine  $s'$ - und eine  $s''$ -Symmetrisierung eines Vierecks gegeben, dann liegen seine Ecken auf den acht Ecken-Symmetrisierungsgeraden  $s'_i, s''_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

Wir betrachten im folgenden nur den allgemeinen – bei Dreiecken mit ( $I', I''$ ) bezeichneten – Fall, in dem  $s'_i$  und  $s''_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) jeweils paarweise verschieden sind;  $s'_1, s'_4$  seien die  $s'$ -parallelen und  $s''_1, s''_4$  die  $s''$ -parallelen Stützgeraden eines Vierecks. Die 16 Schnittpunkte der acht Ecken-Symmetrisierungsgeraden seien wie in Figur 3a mit indizierten Grossbuchstaben bezeichnet. Das Viereck  $A_1D_1D_4A_4$  sei ohne Einschränkung ein Einheitsquadrat. In diesem seien  $x, y, u, v$  der Reihe nach die Längen der Strecken  $A_1A_2, A_1B_1, A_3A_4, C_1D_1$ .



Figur 3a



Figur 3b

Unser Ziel ist nicht die Ermittlung aller Viereckspaare, bei deren Vierecken die  $s'$ - und  $s''$ -Symmetrisierungen jeweils übereinstimmen ( $S$ -Viereckspaare, bestehend aus  $S$ -Vierecken). Wir geben lediglich im vorliegenden allgemeinen Fall Beispiele für  $S$ -Viereckspaare an, wobei die Ecken der betrachteten Vierecke der Punktmenge  $M := \{A_1, \dots, A_4, \dots, D_1, \dots, D_4\}$  angehören. Zwei solche Vierecke bilden ein  $S$ -Viereckspaar, wenn ihre  $s'_2$ - und  $s'_3$ - sowie ihre  $s''_2$ - und  $s''_3$ -Sehnen gleiche Länge besitzen (*Horizontal- bzw. Vertikalbedingungen*). Ein Viereck wird angegeben durch Hintereinanderschreiben seiner Ecken in der Reihung, in der diese bei einer Durchlaufung des Vierecks aufeinanderfolgen.

Wir bemerken, dass ein Eckenquadrupel aus  $M$  (mit genau einer Ecke auf jeder Ecken-Symmetrisierungsgeraden) noch kein Viereck bestimmt, und ein Paar verschiedener Eckenquadrupel noch kein Viereckspaar festlegt. Durch Abzählen findet man 80 wesentlich verschiedene Eckenquadrupelpaare, die bei vollständiger Bearbeitung des allgemeinen Falles auf alle Arten zu Viereckspaaren zu ergänzen und sodann auf  $S$ -Viereckspaare zu untersuchen sind. Diese Bemerkung skizziert die umfangreiche Aufgabe, die im Auffinden aller  $S$ -Viereckspaare besteht.

Wir beginnen nun die Untersuchung von Viereckspaaren auf  $S$ -Viereckspaare.

$S$ -Viereckspaare  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2)$  (Fig. 3a, Fig. 3b): Die kennzeichnenden Horizontal- und Vertikalbedingungen lauten

$$\begin{aligned}
 s'_2 \dots y &= (1 - x - u)(1 - v), & s'_3 \dots v &= (1 - x - u)(1 - y), \\
 s''_2 \dots x &= (1 - y - v)(1 - u), & s''_3 \dots u &= (1 - y - v)(1 - x).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Diese Bedingungen sind in den Figuren 3a und 3b als flächengleiche Rechtecke interpretierbar. Das Gleichungssystem (4) in den Unbekannten  $x, y, u, v$  besitzt die Lösungen

$$u = x, v = y \quad \text{mit} \quad xy - x - y + \frac{1}{2} = 0, \tag{5}$$

die eine einparametrische Schar von  $S$ -Viereckspaaren  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2)$  festlegen. Im Anschluss an (5) findet man unmittelbar die folgenden Aussagen, die wir in Satz 2 zusammenfassen:

- Satz 2.** a) Die  $S$ -Viereckspaare  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2)$  sind in Normalgestalt unter Beachtung von  $u = x$  und  $v = y$  bestimmt, wenn der Punkt  $B_2$  im Gebiet des Quadrats  $A_1D_1D_4A_4$  auf der durch  $xy - x - y + \frac{1}{2} = 0$  gegebenen gleichseitigen Hyperbel  $h$  wandert;  $D_1D_4$  und  $D_4A_4$  sind die Asymptoten von  $h$ . Die so festgelegte einparametrische Schar der  $S$ -Viereckspaare  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2)$  liegt symmetrisch zur Quadratdiagonale  $A_1D_4$ .
- b) Die Vierecke der  $S$ -Viereckspaare  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2)$  sind Parallelogramme, die den Mittelpunkt des Quadrats  $A_1D_1D_4A_4$  als gemeinsamen Mittelpunkt besitzen und ausserdem in Richtung  $B_1C_2$  und in Richtung  $C_2D_3$  gemeinsame Symmetrisierungen aufweisen<sup>6</sup>).
- c) Ein  $S$ -Viereckspaar  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2)$  ist genau dann axialsymmetrisch, wenn  $A_1, B_2, D_4$  kollinear liegen.
- d) Mit jedem  $S$ -Viereckspaar  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2)$  ist auch  $(A_1C_2D_4B_3, C_1D_2B_4A_3)$  ein  $S$ -Viereckspaar<sup>7</sup>), und  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2, C_1D_2B_4A_3, D_1C_3A_4B_2)$  ist ein aus Parallelogrammen bestehendes  $S$ -Vierecksquadrupel.

Nach Satz 2 gibt es also *Parallelogrammpaare mit gleichen Symmetrisierungen der Parallelogramme in vier Richtungen und Parallelogrammquadrupel mit gleichen Symmetrisierungen der Parallelogramme in zwei Richtungen.*

$S$ -Viereckspaare  $(A_1D_2C_3B_4, B_1D_3C_4A_2)$  (Fig. 3a, 4): Die kennzeichnenden Horizontal- und Vertikalbedingungen lauten:

$$s'_2 \dots 1 - xy = x + \frac{y(1-x)}{1-v}, \tag{6a}$$

$$s'_3 \dots 1 - u - x(1-v) = u + \frac{v(1-u)}{1-y}, \tag{6b}$$

$$s''_2 \dots 1 - xy = y + \frac{x(1-y)}{1-u}, \tag{6c}$$

$$s''_3 \dots 1 - v - y(1-u) = v + \frac{u(1-v)}{1-x}. \tag{6d}$$

<sup>6</sup>) Zwei kongruente Quadrate mit gemeinsamem Mittelpunkt, die um  $\pi/4$  gegeneinander verdreht sind, bilden ein  $S$ -Viereckspaar vom Typ  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2)$ .

<sup>7</sup>) Die Ermittlung aller  $S$ -Viereckspaare  $(A_1C_2D_4B_3, C_1D_2B_4A_3)$  aus den zugehörigen Horizontal- und Vertikalbedingungen führt erneut auf (5). – Die Ermittlung der  $S$ -Viereckspaare  $(C_1D_2B_4A_3, B_1D_3C_4A_2)$  und der  $S$ -Viereckspaare  $(A_1C_2D_4B_3, D_1C_3A_4B_2)$  führt auf  $u = x, v = y$ . Damit ist jeweils eine *zweiparametrische Schar* von  $S$ -Parallelogrammpaaren bestimmt; jedes dieser Paare liegt axialsymmetrisch zu den Mittelparallelen gegenüberliegenden Seiten des Quadrats  $A_1D_1D_4A_4$ .



Aus (6a) erhält man

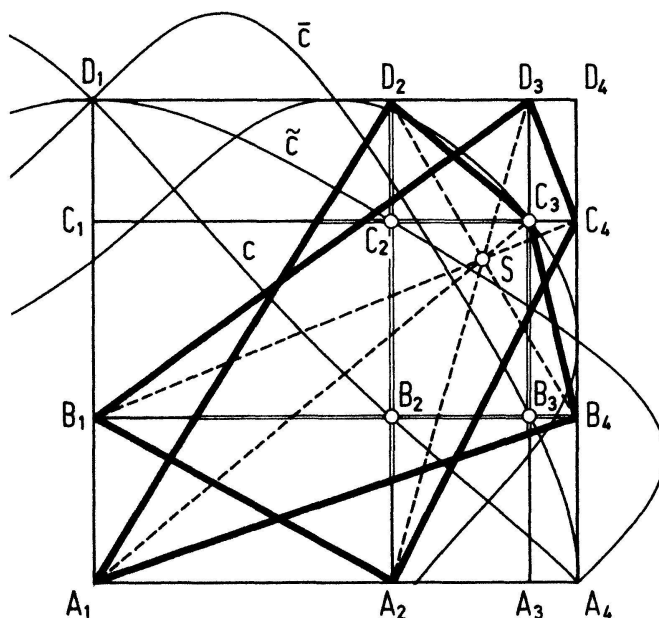
$$v = \frac{1-x-y}{1-x-xy} \quad \text{mit} \quad 1-x-xy \neq 0^8), \quad (7)$$

und aus (6c) folgt

$$u = \frac{1-y-x}{1-y-xy} \quad \text{mit} \quad 1-y-xy \neq 0. \quad (8)$$

Ersetzt man  $u$  und  $v$  in (6b) und (6d) durch (7) und (8), so folgt nach einfacher Rechnung die einzige Bedingung:

$$x^2y^2 + x + y - 1 = 0, \quad (9)$$



Figur 4

die eine einparametrische Schar von  $S$ -Viereckspaaren  $(A_1D_2C_3B_4, B_1D_3C_4A_2)$  festlegt. Die weitere Diskussion dieser  $S$ -Viereckspaare aufgrund der Gleichungen (6a) bis (9) liefert die Aussagen des folgenden Satzes:

**Satz 3.** *a) Die  $S$ -Viereckspaare  $(A_1D_2C_3B_4, B_1D_3C_4A_2)$  sind in Normalgestalt bestimmt, wenn der Punkt  $B_2$  im Gebiet des Quadrats  $A_1D_1D_4A_4$  auf der zur Quadratdiagonale  $A_1D_4$  symmetrischen Kurve 4. Ordnung  $c$  (9) wandert und sich dabei der Punkt  $B_3(\bar{x}: = 1-u, \bar{y}: = y)$  auf der Kurve 4. Ordnung  $\bar{c}$ ,*

$$\bar{x}^2\bar{y}^2 + (\bar{x} - 1)^2\bar{y} + \bar{x} - 1 = 0 \quad (10)$$

<sup>8)</sup> Für  $1-x-xy=0$  folgt aus (6a)  $y(1-x)=0$  und daraus  $s'_1=s'_2$  oder  $s''_2=s''_4$  im Widerspruch dazu, dass  $s'_1, \dots, s'_4$  und  $s''_1, \dots, s''_4$  paarweise verschieden vorausgesetzt sind. Folglich ist  $1-x-xy \neq 0$ . Entsprechend folgt in (8)  $1-y-xy \neq 0$ .

und der Punkt  $C_2$  ( $\tilde{x} := x, \tilde{y} := 1 - v$ ) auf der Kurve 4. Ordnung  $\tilde{c}$

$$\tilde{x}^2\tilde{y}^2 + (\tilde{y} - 1)^2\tilde{x} + \tilde{y} - 1 = 0 \tag{11}$$

bewegt;  $\tilde{c}$  entsteht aus  $\bar{c}$  durch Spiegelung an der Quadratdiagonale  $A_1D_4$ . Die so festgelegte einparametrische Schar der  $S$ -Viereckspaare  $(A_1D_2C_3B_4, B_1D_3C_4A_2)$  liegt symmetrisch zu  $A_1D_4$ .

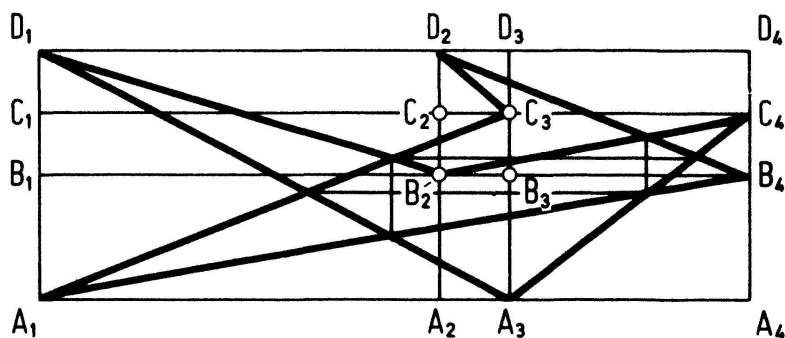
b) Bei jedem Viereck eines  $S$ -Viereckspaars  $(A_1D_2C_3B_4, B_1D_3C_4A_2)$  stimmen die Längen der  $s'_2$ - und  $s''_2$ -Sehne sowie der  $s'_3$ - und  $s''_3$ -Sehne überein.

c) Die Diagonalschnittpunkte der Vierecke eines  $S$ -Viereckspaars  $(A_1D_2C_3B_4, B_1D_3C_4A_2)$  inzidieren und liegen auf der Kurve 4. Ordnung

$$(2\xi - 1)^2(2\eta - 1)^2 + 2\xi + 2\eta - 3 = 0. \tag{12}$$

Dabei sind  $\xi, \eta$  die Abstände des Diagonalschnittpunkts  $S(\xi, \eta)$  von  $A_1D_1$  bzw.  $A_1A_4$ .

Wandert  $B_2$  auf der Kurve 4. Ordnung  $c$  und verlässt  $B_2$  das Gebiet des Quadrats  $A_1D_1D_4A_4$ , dann wandern schliesslich alle Punkte  $B_2, B_3, C_2, C_3$  in das Aussengebiet von  $A_1D_1D_4A_4$ . Dabei ergeben sich weitere – nicht notwendig konvexe –  $S$ -Viereckspaare, die jedoch keine Normalgestalt aufweisen (das einem dieser  $S$ -Viereckspaare umbeschriebene Rechteck mit  $s'$ - und  $s''$ -parallelen Seiten ist kein Einheitsquadrat). Werden die Bezeichnungen aus Figur 3a sinngemäss übernommen, dann findet man  $S$ -Viereckspaare  $(A_1D_2C_3B_4, C_1B_3D_4A_2)$  sowie  $S$ -Viereckspaare  $(A_1C_3D_2B_4, D_1B_2C_4A_3)$  (Fig. 5).



Figur 5

Schlussbemerkungen: 1. Die Horizontal- und die Vertikalbedingungen für ein  $S$ -Viereckspaars sind nicht stets verträglich. Werden jedoch die Vierecke «symmetrisch» zum Quadrupel  $(A_1, B_2, C_3, D_4)$  angeordnet (Fig. 3a), so kann man – wie in Satz 2 und Satz 3 – einparametrische Scharen von  $S$ -Viereckspaars finden. Bei «symmetrischer» Anordnung der Vierecke zu den Mittelparallelen gegenüberliegender Quadratseiten sind sogar zweiparametrische Scharen von  $S$ -Viereckspaars möglich (siehe Fussnote 7 und Fig. 3b). Sucht man allgemein Paare von  $n$ -Ecken ( $n \geq 3$ ) mit gleichen Symmetrisierungen in zwei verschiedenen Richtungen, so ergeben die  $n - 2$  Horizontal- und die  $n - 2$  Vertikalbedingungen ein System von  $2(n - 2)$  (im allgemeinen nichtlinearen)-algebraischen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten, dessen Lösbarkeit zu untersuchen ist.

2. Die vorgestellten einparametrischen Scharen von  $S$ -Dreieckspaaren und  $S$ -Viereckspaaren hängen von der gewählten Normalgestalt ab. Bei Verwendung anderer Normalgestalten entstehen äquivalente einparametrische Scharen. So lässt die Schar der  $S$ -Viereckspaare  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2)$  aus Satz 2 unter Beibehaltung orthogonaler Symmetrierichtungen  $s', s''$  folgende Version zu: Werden (siehe Fig. 3a) die Längen der Strecken  $B_1B_2, B_1D_1$  zu 1 normiert und werden  $B_1$  als Ursprung eines kartesischen  $xy$ -Systems,  $B_2$  als Einheitspunkt der  $x$ -Achse und  $D_1$  als Einheitspunkt der  $y$ -Achse gewählt, dann laufen bei den  $S$ -Viereckspaaren  $(A_1C_2D_4B_3, B_1D_3C_4A_2)$  die Ecken  $C_3, C_4, A_4$  der Reihe nach auf den Hyperbeln  $xy + y = 2$ ,  $xy = 2$ ,  $yx + x = 2$ . Die Schar der  $S$ -Viereckspaare  $(A_1C_2D_4, B_3, B_1D_3C_4A_2)$  ist auch in dieser Version erzeugbar. Man kann diese Erzeugung – wie Erzeugungen aufgrund anderer Normierungen – als kinematischen Satz formulieren.

O. Giering, München

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W. Blaschke: Kreis und Kugel, 2. Aufl. Berlin 1956.
- 2 K. J. Falconer: X-ray problems for point sources. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 46, 241–262 (1983).
- 3 R. J. Gardner: Symmetrals and X-rays of planar convex bodies. Arch. Math. 41, 183–189 (1983).
- 4 R. J. Gardner und P. McMullen: On Hammer's X-ray problem. J. Lond. Math. Soc. (2) 21, 171–175 (1980).
- 5 O. Giering: Bestimmung von Eibereichen und Eikörpern durch Steiner-Symmetrisierungen. S.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Naturw. Kl., S. 225–253 (1962).
- 6 J. Steiner: Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze. J. reine angew. Math. 18, 289–296 (1838); Ges. Werke, Bd. 2, S. 77–91. Berlin 1882.
- 7 J. Steiner: Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt. J. Math. pures appl. 6, 105–170 (1842); J. reine angew. Math. 24, 93–152 und 189–250 (1842); Ges. Werke, Bd. 2, S. 245–308. Berlin 1882.
- 8 A. Volčič: A new proof of the Giering theorem. Manuscripta math. (im Erscheinen).
- 9 A. Volčič: A three point solution to Hammer's X-ray problem. Proc. Lond. Math. Soc. (im Erscheinen).
- 10 A. Volčič: Uniqueness theorems for mixed X-ray problems of Hammer type. Preprint (DFG-Forschungsprojekt Rekonstruktion, Leiter: Prof. Dr. Kölzow, Universität Erlangen).