Von Polyedern im ganzzahligen Gitter

Autor(en): **Giger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **40 (1985)**

Heft 2

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-38827

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math.	Band 40	Nr. 2	Seiten 33–56	Basel, 10. März 1985

Von Polyedern im ganzzahligen Gitter

Einleitung

Ein Polyeder, dessen Ecken Punkte des ganzzahligen Gitters sind, wird im folgenden $\mathbf{Z}^3$-Polyeder genannt. Punkte (und gleichzeitig deren Ortsvektoren) werden mit grossen Buchstaben bezeichnet und die Koordinaten mit entsprechenden und indizierten kleinen Buchstaben.

Auf der Suche nach einer Darstellung von $\mathbf{Z}^3$-Würfeln und von regulären $\mathbf{Z}^3$-Tetraedern (wobei angenommen werden kann, dass sich eine Ecke im Ursprung O befindet), stösst man auf zwei Erweiterungsprobleme. Es zeigt sich nämlich, dass nicht jedes $\mathbf{Z}^3$-Quadrat zu einem $\mathbf{Z}^3$-Würfel ausgebaut werden kann, wie die Punkte O, $(1/5/0)$, $(-5/1/0)$ und $(-4/6/0)$ veranschaulichen. Ebensowenig lässt sich jedes gleichseitige $\mathbf{Z}^3$-Dreieck zu einem regulären $\mathbf{Z}^3$-Tetraeder erweitern, wie etwa die Punkte O, $(3/15/0)$ und $(-1/8/13)$ zeigen. Wir untersuchen, wann diese Erweiterungen möglich sind, und finden damit notwendige Bedingungen für die Existenz von $\mathbf{Z}^3$-Würfeln und von regulären $\mathbf{Z}^3$-Tetraedern. Die Lösung des Quadratproblems führt zur Frage, ob jede $\mathbf{Z}^3$-Strecke mit ganzzahliger Länge Kante eines $\mathbf{Z}^3$-Würfels ist, d. h. ob jedes pythagoreische Quadrupel $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 (a, b, c, d \in \mathbf{Z})$ zu einem Kantenvektor $(a/b/c)$ eines $\mathbf{Z}^3$-Würfels führt, wie es für $c = 0$, d. h. für ein pythagoreisches Tripel, leicht einsichtig ist. Wir beantworten diese Frage durch die Angabe der Drehung, welche ein gegebenes Dreibein von pythagoreischen Quadrupeln aus einem dazu kongruenten Koordinaten-Dreibein entstehen lässt, und gewinnen damit eine Möglichkeit, alle $\mathbf{Z}^3$-Würfel explizit zu beschreiben.

Die Flächendiagonalen eines $\mathbf{Z}^3$-Würfels bilden die Kanten von zwei regulären $\mathbf{Z}^3$-Tetraedern. Wir zeigen, dass auf diese Weise alle regulären $\mathbf{Z}^3$-Tetraeder erfasst werden. Die oben erwähnte explizite Beschreibung der $\mathbf{Z}^3$-Würfel beinhaltet damit auch die Beschreibung aller regulären $\mathbf{Z}^3$-Tetraeder.

1. Wir beginnen unsere Betrachtung mit einem $\mathbf{Z}^3$-Quadrat mit den Ecken O, A, B und $A + B$. Für seine Seitenlänge s gilt die Beziehung $s^2 = A^2$, das heisst, s^2 ist eine natürliche Zahl. Erweitert man das Quadrat zu einem Würfel, so gilt für die Würfelecke C «über» O:

$$C = \frac{1}{s}(A \times B) \quad \text{oder} \quad C = -\frac{1}{s}(A \times B). \tag{1.1}$$

Liegt C in $\mathbf{Q}^3$, so folgt aus $C \neq O$, dass s eine rationale Zahl sein muss. Da aber s^2 in $\mathbf{N}$ zu finden ist, muss s selbst eine natürliche Zahl sein.

Um herauszufinden, ob die Ganzzahligkeit von s auch eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines $\mathbf{Z}^3$-Würfels ist, betrachten wir die orthonormierte Matrix, deren Zeilen von den Koordinaten der Punkte $\frac{A}{s}$, $\frac{B}{s}$ und $\frac{C}{s}$ gebildet werden. Da auch die Kolonnen dieser Matrix ein orthonormiertes Dreibein bilden, gilt für $i \in \{1,2,3\}$

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = s^2. \tag{1.2}$$

Ist nun s eine ganze Zahl, so liegt C nach (1.1) sicher in $\mathbf{Q}^3$. (1.2) bedingt zusätzlich, dass c_i^2 für jeden Wert von i eine ganze Zahl ist. C liegt daher in $\mathbf{Z}^3$. Da die restlichen Ecken des Würfels in $A + C$, $B + C$ und $A + B + C$ zu finden sind, gilt somit

Satz 1. *Ein $\mathbf{Z}^3$-Quadrat lässt sich genau dann zu einem $\mathbf{Z}^3$-Würfel erweitern, wenn die Quadratseite eine ganzzahlige Länge hat.*

Dieser Satz bedingt, dass die Koordinaten von A, B respektive C jedes $\mathbf{Z}^3$-Würfels zusammen mit s ein pythagoreisches Quadrupel bilden. Alle diese Quadrupel sind bekannt (vgl. [1] und [2]): mit Hilfe der ganzzahligen Parameter m, n, p und q lässt sich etwa A (bis auf eine Permutation der Koordinaten) darstellen als $(m^2 + q^2 - (n^2 + p^2)/2(mn - pq)/2(mp + nq))$, wobei $s = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$. Tatsächlich lässt sich sogar ein gleichseitiges orthogonales $\mathbf{Z}^3$-Dreibein mit Kante OA konstruieren.
Wir beschreiben eine Drehung um die gerichtete Gerade g durch O mit Hilfe von Quaternionen. Ist E der Richtungsvektor von g (mit Länge 1) und w der Drehwinkel, so lässt sich diese Abbildung $P \to P'$ darstellen als $\mathbf{P}' = \mathbf{D}(-w) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}(w)$ mit den Quaternionen $\mathbf{D}(w) = \cos\frac{w}{2} + \sin\frac{w}{2} \cdot E$ und $\mathbf{P} = O + P$, P in $\mathbf{R}^3$.
Das Koordinatendreibein mit Kantenlänge s wird in ein orthogonales $\mathbf{Z}^3$-Dreibein mit Kante OA übergeführt, wenn man es der Drehung unterwirft, welche durch folgende Daten gegeben ist:

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{q}{\sqrt{s}}, \qquad \sin\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{s}}, \qquad E = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}\,(m/n/p).$$

In der Tat gewinnt man so

Satz 2. *Die Nachbarecken von O jedes $\mathbf{Z}^3$-Würfels lassen sich mit Hilfe der ganzzahligen Parameter m, n, p und q wie folgt darstellen:*

$$\begin{aligned}
A &= (m^2 + q^2 - (n^2 + p^2)/2(mn - pq)/2(mp + nq)),\\
B &= (2(mn + pq)/n^2 + q^2 - (m^2 + p^2)/2(np - mq)),\\
C &= (2(mp - nq)/2(mq + np)/p^2 + q^2 - (m^2 + n^2)).
\end{aligned}$$

2. Wir führen unsere Betrachtungen mit einem gleichseitigen $\mathbf{Z}^3$-Dreieck OXY der Kantenlänge d fort. Es gilt also $X^2 = d^2 = Y^2$ und $X \cdot Y = \frac{1}{2} d^2$. Da X und Y in $\mathbf{Z}^3$ liegen, folgt:

$$d^2 \text{ liegt in } 2\,\mathbf{N}. \tag{2.1}$$

Baut man OXY zu einem regulären Tetraeder aus, so gilt für die vierte Ecke:

$$Z = \frac{X+Y}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3d}(X \times Y) \quad \text{oder} \quad Z^* = \frac{X+Y}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3d}(X \times Y). \tag{2.2}$$

Liegt diese vierte Ecke in $\mathbf{Q}^3$, so muss $\frac{d}{\sqrt{2}}$ eine rationale Zahl sein. Nach (2.1) ist aber ihr Quadrat eine ganze Zahl. Somit finden wir die Darstellung

$$d = s\sqrt{2}, \qquad \text{wobei} \quad s \in \mathbf{N}. \tag{2.3}$$

Wiederum fragt man sich, ob diese Bedingung auch hinreichend ist. Mit $X = (1/1/0)$ und $Y = (1/0/1)$ findet man ein reguläres Tetraeder mit $Z = \frac{1}{3}(4/-1/-1)$, aber auch mit $Z^* = (0/1/1)$. Um einzusehen, ob dieses Beispiel typischen Charakter hat, fassen wir dās Tetraeder $OXYZ$ mit Kantenlänge $d = s\sqrt{2}$ als Flächendiagonalen-Tetraeder eines Würfels mit Kantenlänge s auf. Für die zu O benachbarten Würfelecken A, B und C findet man zum Beispiel

$$A = \frac{Y+Z-X}{2}, \qquad B = \frac{X+Z-Y}{2}, \qquad \frac{X+Y-Z}{2}. \tag{2.4}$$

Dies ermöglicht uns, wiederum die Kolonnen der orthonormierten Matrix zu betrachten, die von A, B und C erzeugt wird. Setzt man die Darstellungen (2.4) in (1.2) ein, so erhält man

$$3z_i(z_i - 2s_i) = 4s^2 - 3x_i^2 - 3y_i^2 + 2x_iy_i, \tag{2.5}$$

wobei S der Schwerpunkt des Dreiecks OXY ist. Erweitert man (2.5) mit 3, so gewinnt man durch quadratisches Ergänzen

$$(3z_i - x_i - y_i)^2 = 4(3s^2 - 2x_i^2 - 2y_i^2 + 2x_iy_i). \tag{2.6}$$

Ist nun s eine natürliche Zahl, so sind $3Z$ und $3Z^*$ nach (2.2) beide in $\mathbf{Q}^3$. Da X und Y in $\mathbf{Z}^3$ liegen, bedingt (2.6), dass $(3z_i - x_i - y_i)^2$ eine ganze Zahl ist. Beide Aussagen zusammen machen klar, dass $3z_i$ für jeden Wert von i eine ganze Zahl sein muss, das heisst, $3Z$ liegt in $\mathbf{Z}^3$. Da S in der Mitte von Z und Z^* liegt und $3S = X + Y$ ist, so folgt aus $Z + Z^* = 2S$ zusammenfassend:

$$3Z \text{ und } 3Z^* \text{ liegen in } \mathbf{Z}^3. \tag{2.7}$$

Weiter ist $(3Z)^2 = (3Z^*)^2 = 18s^2$ und $(3S)^2 = (X + Y)^2 = 6s^2$. Die Punkte $3Z$, $3Z^*$ und $3S$ genügen daher den Voraussetzungen des folgenden Hilfssatzes:

Lemma. *Ist H in $\mathbf{Z}^3$ und ist H^2 eine Dreierzahl, so sind entweder alle Koordinaten von H Dreierzahlen oder überhaupt keine.*

Sind nämlich h_1 und h_2 Dreierzahlen, so gilt dies auch für h_3^2, also auch für h_3 selbst, ist doch h_3 eine ganze Zahl.
Wäre nur h_1 eine Dreierzahl, so wären h_2^2 und h_3^2 beide in $3\mathbf{Z} + 1$ und H^2 läge damit in $3\mathbf{Z} + 2$.
Wir benützen dieses Lemma bei der Diskussion von (2.5), indem wir beachten, dass die betrachteten Fälle simultan für alle Koordinaten auftreten.
Ist S in $\mathbf{Z}^3$, so folgt aus (2.5) und (2.7), dass $3z_i^2$ eine ganze Zahl sein muss. Für den Punkt $P = 3Z$ ist damit sogar $\frac{1}{3}p_i^2$ eine ganze Zahl, das heisst, P liegt in $(3\mathbf{Z})^3$. Damit ist aber Z selbst in $\mathbf{Z}^3$ und ebenso dann $Z^*(= 2S - Z)$.
Liegt S nicht in $\mathbf{Z}^3$, dann (wegen $3S \in \mathbf{Z}^3$) auch nicht $2S$, und es gibt zwei Möglichkeiten:

— Ist Z in $\mathbf{Z}^3$, so liegt $Z^*(= 2S - Z)$ nicht in $\mathbf{Z}^3$.
— Ist Z nicht in $\mathbf{Z}^3$, so müssen die Koordinaten von P alle teilerfremd sein zu 3. (2.5) lässt sich umschreiben zu

$$\tfrac{1}{3}p_i(p_i - 6s_i) \in \mathbf{Z}.$$

Da P in $\mathbf{Z}^3$ liegt, nicht aber $\dfrac{P}{3}$, so muss $\frac{1}{3}(P - 6S)$ in $\mathbf{Z}^3$ liegen, also auch $2S - Z$, was aber Z^* ist.

Zusammenfassend haben wir damit

Satz 3. *Ein gleichseitiges $\mathbf{Z}^3$-Dreieck lässt sich genau dann zu einem regulären $\mathbf{Z}^3$-Tetraeder ausbauen, wenn seine Kantenlänge von der Form $s\sqrt{2}$ ist, wobei $s \in \mathbf{N}$. Ist dabei der Schwerpunkt S des Dreiecks in $\mathbf{Z}^3$, so sind beide Erweiterungen $\mathbf{Z}^3$-Tetraeder. Liegt S nicht in $\mathbf{Z}^3$, so ist nur eine Erweiterung ein $\mathbf{Z}^3$-Polyeder. Die andere Erweiterung wird dies erst, wenn sie von O aus mit dem Faktor 3 gestreckt wird.*

Abschliessend stellt sich auch hier die Frage, ob jede $\mathbf{Z}^3$-Strecke mit einer Länge in $\sqrt{2}\,\mathbf{N}$ in ein reguläres $\mathbf{Z}^3$-Tetraeder eingebettet werden kann. Versucht man eine Antwort im Sinne der Herleitung von Satz 2 zu finden, so stösst man auf (wie uns scheint) heikle zahlentheoretische Probleme.
Um doch noch zu einer Aufzählung der regulären $\mathbf{Z}^3$-Tetraeder zu gelangen, kann man prüfen, ob der Ausbau (2.4) aus jedem regulären $\mathbf{Z}^3$-Tetraeder einen $\mathbf{Z}^3$-Würfel entstehen lässt. Dabei genügt es zu zeigen, dass die Würfelecke $D = \frac{1}{2}(X + Y + Z)$ in $\mathbf{Z}^3$ liegt, gilt doch $A = D - X, B = D - Y$ und $C = D - Z$.
Da nach (2.1) d^2 eine gerade Zahl ist, können die Punkte X, Y und Z nur in den Teilmengen $\mathbf{G}^3$, $\mathbf{G} \times \mathbf{U}^2$, $\mathbf{U} \times \mathbf{G} \times \mathbf{U}$ und $\mathbf{U}^2 \times \mathbf{G}$ von $\mathbf{Z}^3$ liegen, wobei $\mathbf{G}$ die Menge der

geraden Zahlen und **U** die Menge der ungeraden Zahlen bezeichnen. Diese vier Teilmengen bilden bezüglich der komponentenweisen Paritätsaddition eine Kleinsche Vierergruppe V.
Liegt etwa X in $\mathbf{G}^3$, so ist d^2 in 4 **N**, also müssen auch Y und Z in $\mathbf{G}^3$ liegen. Liegt keiner der Punkte in $\mathbf{G}^3$, so dürfen keine zwei Punkte im gleichen Element von V sein, ist doch $(X-Y)^2=(X-Z)^2=(Y-Z)^2=d^2$ und $d^2 \in 4\,\mathbf{N}+2$.
Somit ist in beiden Fällen $X+Y+Z$ in $\mathbf{G}^3$:

Satz 4. *Ein Flächendiagonalen-Tetraeder eines Würfels kann nur dann ein $\mathbf{Z}^3$-Polyeder sein, wenn der Würfel selbst ein $\mathbf{Z}^3$-Polyeder ist.*

Mit Hilfe der Sätze 4 und 2 lassen sich somit auch alle regulären $\mathbf{Z}^3$-Tetraeder aufzählen.
Abschliessend möchten wir H. Debrunner für wertvolle Hinweise danken.

H. Giger, Bern, und H. Hösli, Ittigen

LITERATURVERZEICHNIS

1 F. Steiger: Über die Grundlösungen der Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$. El. Math. *XI*/5, 105–109 (1956).
2 F. Steiger: Über die Grundlösungen der Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$. MNU, Band 10, Heft 2, S. 83–86 (1957/58).

 0013-6018/85/060033-05$1.50 + 0.20/0