Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **40 (1985)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

— für $n > 5$ wächst σ_n im ganzen Definitionsbereich monoton von π auf $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{n}\right) \cdot \pi$ (s. 12).

Man bemerkt noch

$$\lim_{h \to 0} \frac{d\sigma_6}{dh} = 0, \tag{56}$$

d.h. der Graph der Funktion σ_6 hat für $h \to 0$ eine horizontale Asymptote.

5. Graphen

Nachstehend ein Teil der Graphen der Funktionen σ_n für $n = 3, 4, 5, 6, 8, 20, 180$. Sie wurden von Fräulein C. Rademacher im Rechenzentrum des Mathematischen Instituts der Ludwig-Maximilians-Universität München produziert. Man beachte, dass sie ausser von der Wahl des Parameters h auch von der ebenfalls willkürlichen Normierung (2) abhängen. Es ergeben sich zum Beispiel weder der Grenzwert (14) noch Monotonie für die Folgen $(\sigma_n h)_{\mathrm{N}}$ (h fest), wenn man die Seitenlänge des Basisvielecks zu 1 normiert.

R. Fritsch
Math. Institut, Universität München

LITERATURVERZEICHNIS

1 J.P. Sydler: Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. Comment. Math. Helv. *40*, 43–80 (1965).

 0013-6018/85/060068-08$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 908. Show that the length of a side of the Morley triangle of a given triangle T is less than one third the length of the smallest side of T. (The Morley triangle of T is the equilateral triangle formed by the intersection in pairs of the angle trisectors of T.)

M.S. Klamkin, Alberta, CDN
R. Spira, Ashland, Oregon, USA

Lösung: Es seien a, b, c die Seiten, α, β, γ die Innenwinkel und R der Umkreisradius des Dreiecks T; die Seitenlänge des zu T gehörenden Morley-Dreiecks sei mit s bezeichnet. O.B.d.A. sei a die kleinste Seite von T.

Es gilt bekanntlich:

$$a = 2R \sin\alpha, \tag{1}$$

$$s = 8R \sin(\alpha/3) \sin(\beta/3) \sin(\gamma/3). \tag{2}$$

Mit den folgenden bekannten trigonometrischen Formeln

$$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi, \tag{3}$$
$$\sin\varphi\sin\psi = (\cos(\varphi-\psi) - \cos(\varphi+\psi))/2, \tag{4}$$
$$\sin(3\varphi) = 4\sin\varphi\sin(60^\circ-\varphi)\sin(60^\circ+\varphi) \tag{5}$$

(zu (2) und (5) siehe z.B. [1], S. 181–183) folgt unter Berücksichtigung von $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$:

$$\begin{aligned}
\frac{s}{a} &= \frac{8R\sin(\alpha/3)\sin(\beta/3)\sin(\gamma/3)}{2R\sin\alpha}\\
&= \frac{\sin(\alpha/3)(\cos(\beta/3-\gamma/3)-\cos(\beta/3+\gamma/3))/2}{\sin(\alpha/3)\sin(60^\circ-\alpha/3)\sin(60^\circ+\alpha/3)}\\
&\le \frac{(1-\cos(60^\circ-\alpha/3))/2}{\sin(60^\circ-\alpha/3)\sin(60^\circ+\alpha/3)}\\
&= \frac{\sin^2(30^\circ-\alpha/6)}{2\sin(30^\circ-\alpha/6)\cos(30^\circ-\alpha/6)\sin(60^\circ+\alpha/3)}\\
&= \frac{\tan(30^\circ-\alpha/6)}{2\sin(60^\circ+\alpha/3)} < \frac{\tan 30^\circ}{2\sin 60^\circ} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Anmerkung: Für gleichschenklige Dreiecke ($\beta = \gamma$) ergibt sich beim Grenzübergang $\alpha \to 0^\circ$ (und damit $\beta, \gamma \to 90^\circ$): $s/a \to 1/3$. Obige Abschätzung ist also bestmöglich.

A. Köbinger, München, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 H. Dörrie: Ebene und sphärische Trigonometrie. München 1950.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), P. Bundschuh (Köln, BRD), J.M. Ebersold (Winterthur), H. Frischknecht (Berneck), P. Hohler (Olten), M.C. van Hoorn (Groningen, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-wai Lau (Hongkong), O.P. Lossers (Eindhoven, NL, 2 Lösungen), Hj. Stocker (Wädenswil), G. Unger (Dornach), E. Ungethüm (Wien, A), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 909. Welche zahlentheoretische Funktion wird durch

$$f(n) := [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}]; \qquad n \in \mathrm{N}$$

dargestellt?

H. Kappus, Rodersdorf

Lösung (Bearbeitung der Redaktion): Zunächst ist $f(1) = 1$. Ferner verifiziert man direkt

$$4n - 1 < (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})^2 < 4n \quad \text{für} \quad n \geqslant 2.$$

Daraus folgt $[\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n-1}]$. Aus der so gewonnenen Darstellung

$$f(n)=[\sqrt{4n}]-[\sqrt{4n-1}], \quad n\in\mathrm{N}$$

liest man nunmehr ab:

$$f(n)=\begin{cases}1, \text{ wenn } n \text{ Quadratzahl ist,}\\ 0 \text{ andernfalls.}\end{cases}$$

J. Binz, Bolligen
W. Janous, Innsbruck, A

Weitere Lösungen sandten H. Bachmann (Zürich), C. Bindschedler (Küsnacht), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Cseh (Cluj, R), J. Daneš (Prag, CS), K. Dilcher (Wabern, BRD), H. Egli (Zürich), P. Hohler (Olten), M.C. van Hoorn (Groningen, NL), A.A. Jagers (Enschede, NL), Kee-wai Lau (Hongkong), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), V.D. Mascioni (Origlio), I. Merenyi (Cluj, R), G. Rohner (Au), Hj. Stocker (Wädenswil, 2 Lösungen), M. Thoma (Au), G. Unger (Dornach), M. Vowe (Therwil), B. Wannenmacher (Bierbach), C. Wildhagen (Breda, NL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1985* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 923. Für die Umfänge der Dreiecke mit den Seiten $(y+z)/(1+yz)$, $(z+x)/(1+zx)$ und $(x+y)/(1+xy)$, wobei $x=\tan(A/4)$, $y=\tan(B/4)$, $z=\tan(C/4)$ und $A+B+C=\pi$ (vgl. Aufgabe 907, El. Math. *40,* (1985)), sind bestmögliche untere und obere Schranken gesucht.

Hj. Stocker, Wädenswil

Aufgabe 924. Für $n\in\mathrm{N}$ bezeichne $\alpha(n)$ den grössten Teiler von n mit $\alpha(n)\not\equiv 0 \pmod 3$. Man zeige, dass

$$\sum_{n\leqslant x}\alpha(n)n^{-1}=\frac{3}{4}x+0(1), \tag{1}$$

$$\sum_{n\leqslant x}\alpha(n)=\frac{3}{8}x^2+0(x). \tag{2}$$

L. Kuipers, Sierre

Aufgabe 925. Man zeige, dass für $n \geqslant 2$

$$\frac{n \log n}{n-1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \log n + n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

P. Ivády, Budapest, Ungarn

Literaturüberschau

K.H. Kim and F.W. Roush: Applied Abstract Algebra. Ellis Horwood Series, Mathematics and its Applications. 265 Seiten, £25.00. John Wiley & Sons Ltd., New York – Chichester – Brisbane – Ontario, 1983.

Der Titel dieses Buchs ist eine bewusste Irreführung eines allfälligen Käufers, was man vielleicht verschmerzen könnte, wenn wenigstens der Inhalt einigermassen brauchbar wäre. Dies ist leider nicht so: Seite um Seite wird der Leser durch eine Unzahl von Definitionen gehetzt, denen sich Sätze auf banalem Niveau, gleich darauf von hohem Schwierigkeitsgrad anschliessen. Ein Beispiel: §4.4 erläutert Restklassen mod n und kommt bis zum Euler-Fermatschen Satz; der nächste Paragraph führt auf anderthalb Seiten Algebra, einfache, Divisions- und reguläre Ringe ein und beschliesst mit dem Satz von Wedderburn, alles ohne die geringste Motivation. Auf Seite 74 wird die Faktorgruppe und (gänzlich aus dem Blauen heraus) die Sylow Untergruppe erläutert, das Zentrum definiert und der Begriff der einfachen Gruppe vom Hinweis begleitet, dass 1982 die Klassifikation endlicher einfacher Gruppen gelungen sein soll (was immer das dem Leser sagen mag). Erst anschliessend werden Homomorphismen und Permutationsgruppen und ihre elementarsten Eigenschaften eingeführt.

Die sogenannten Anwendungen der abstrakten Algebra beginnen mit dem Unmöglichkeitssatz von Arrow und der Beziehung zwischen endlichen Automaten und regulären Sprachen. Wenn man das zur Not noch zur Algebra rechnen könnte, gehört der Satz von Ford-Fulkerson und seine Anwendung auf Vertretersysteme ganz sicher nicht zu dieser, ebensowenig wie die Pólya-Theorie. Dann kommt lange nichts mehr – Vektorräume, Ringe und Gruppendarstellungen lassen sich offenbar nicht anwenden. Das gelingt erst wieder bei endlichen Körpern, wobei der Leser auf knapp 12 Seiten von der elementarsten Codierungstheorie bis zu den BCH-Codes gejagt wird. Die letzte Textseite des Buchs bringt elf «Offene Probleme» mit der Aufforderung an den geneigten Leser, sie zu lösen. Als Beispiele seien erwähnt das Auffinden eines Beweises, dass jede endliche einfache Gruppe gerade Ordnung hat – mit der Nebenbedingung, dass der Beweis höchstens 100 Seiten füllen soll, sowie die Konstruktion einer projektiven Ebene, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist. (Vielleicht 10?). Problem Nr. 11 lautet: «Finden Sie einen brauch- und berechenbaren Begriff der Komplexität eines wissenschaftlichen Problems.»

P. Wilker

A. Beauville: Complex Algebraic Surfaces. London Mathematical Society, Lecture Note Series, Band 68. 132 Seiten, £10.50, $19.95. Cambridge University Press, Cambridge – London – New York – New Rochelle – Melbourne – Sydney 1983.

Das Buch basiert auf einer Vorlesung des Autors (Orsay, 1976–77) und gibt eine Einführung in die Klassifikation der komplexen projektiven, glatten algebraischen Flächen.

Es richtet sich an Leser, die mit den Grundlagen der algebraischen Geometrie vertraut sind. In knapper Form werden in den ersten zwei Kapiteln die wichtigsten Hilfsmittel bereitgestellt: Die Picard-Gruppe, der Satz von Riemann-Roch, birationale Morphismen, Castelnuovo-Kriterium. Die folgenden zwei Kapitel behandeln Regelflächen und rationale Flächen. Kapitel V behandelt den Rationalitätssatz von Castelnuovo und seine Anwendungen. Anschliessend werden Flächen vom geometrischen Geschlecht O und positiver Irregularität behandelt, wobei die Charakterisierung der Regelflächen im Vordergrund steht. In Kapitel VII wird die Kodaira-Dimension K_s einer Fläche eingeführt und in den folgenden drei Kapiteln die Klassifikation gemäss den Fällen $K_s = 0,1,2$ zu Ende geführt. Das Buch wird beschlossen durch einen Anhang über die Klassifikation der Flächen in Charakteristik p nach Bombieri und Mumford. Das Buch enthält viele wertvolle historische Hinweise und interessante Übungen mit gehaltvollen Beispielen. Es bietet dem Spezialisten zahlreiche Anregungen, ist aber auch für fortgeschrittene Studenten eine gute Einführung in eines der reichhaltigsten klassischen Gebiete der algebraischen Geometrie.

M. Brodmann