Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **40 (1985)**

Heft 5

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Wenn auch der universale entscheidungstheoretische Ansatz sowohl praktisch als auch theoretisch integrierendes Potential besitzt, so sind doch hinsichtlich der Operationalität des Verfahrens einige Vorbehalte zu machen.
Vor allem scheint einerseits die Festsetzung der Verlustfunktion v und anderseits die Frage nach der A-priori-Verteilung φ über dem Zustandsraum etwelche Probleme zu verursachen.
Zu ihrer Lösung scheinen mir deshalb weitere Untersuchungen zum Fall III der partiellen Information (auch hinsichtlich v) erfolgversprechend.

Hans Loeffel
Hochschule St. Gallen

LITERATURVERZEICHNIS

1 J. v. Neumann und O. Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1943.
2 A. Wald: Statistical Decision Functions. Wiley, New York 1950.
3 E. Kofler und G. Menges: Entscheidungen bei unvollständiger Information, Nr. 136 der Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, Berlin 1976.
4 H. Bühlmann, H. Loeffel und E. Nievergelt: Entscheidungs- und Spieltheorie. Springer, Berlin 1975.

 0013-6018/85/060109-12$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

Ungleichungen für $(e/a)^a\,(b/e)^b$

In einer vor kurzem in dieser Zeitschrift veröffentlichten kleinen Mitteilung [1] sind die beiden Ungleichungen

$$(\sqrt{ab})^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < \left(\frac{a+b}{2}\right)^{b-a}, \qquad b > a > 0, \tag{1}$$

bewiesen worden. (Mit e wird die Eulersche Zahl bezeichnet.) Wird für positive Zahlen a und b für $r \in \mathbf{R}$ der Wert $M_r(a,b)$ durch

$$M_r(a,b) := \begin{cases} \left(\dfrac{a^r + b^r}{2}\right)^{1/r} & \text{für} \quad r \in \mathbf{R} - \{0\} \\ \sqrt{ab} & \text{für} \quad r = 0 \end{cases}$$

definiert, so besagt (1):

$$[M_0(a,b)]^{b-a} < (e/a)^a (b/e)^b < [M_1(a,b)]^{b-a}, \qquad b > a > 0. \tag{2}$$

M_r ist eine bezüglich r in ganz $\mathbf{R}$ stetige Funktion, denn es gilt: $\lim\limits_{r \to 0} M_r(a,b) = \sqrt{ab}$.

Für den Fall $a \neq b$ handelt es sich bei M_r um eine streng monoton steigende Funktion (siehe [2], S. 64).
Wir wollen nun zeigen, wie sich die Ungleichungen (2) bestmöglich verschärfen lassen.

Satz. *Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit b > a gilt:*

$$[M_{2/3}(a,b)]^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < [M_{\log 2}(a,b)]^{b-a}. \tag{3}$$

In (3) kann der Wert 2/3 nicht durch eine grössere Zahl und der Wert $\log 2$ *nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden.*

Beweis: Sei $r \in \mathbf{R} - \{0\}$; wir definieren die Funktion $f_r: (0,\infty) \to \mathbf{R}$ durch

$$f_r(x) := \frac{1}{r}(x-1)\log\frac{1+x^r}{2} - x\log x + x - 1 \tag{4}$$

und zeigen, dass

$$f_{2/3}(x) < 0 < f_{\log 2}(x) \quad \text{für} \quad x > 1. \tag{5}$$

Setzt man $x = b/a\ (b > a > 0)$ in (5) ein, so erhält man (3).
Es ist

$$f_r'(x) = \frac{1}{r}\log\frac{1+x^r}{2} - \log x + \frac{(x-1)x^{r-1}}{1+x^r}, \tag{6}$$

$$x(1+x^r)^2 f_r''(x) = x^{2r-1} - 1 + (r-1)[x^r - x^{r-1}], \tag{7}$$

$$\begin{aligned} x(1+x^r)^2 f_r'''(x) = {} & -f_r''(x)[1 + 2(1+r)x^r + (2r+1)x^{2r}] \\ & + x^{r-2}[(2r-1)x^r + (r-1)(r(x-1)+1)] \end{aligned}$$

und folglich

$$f_r(1) = f_r'(1) = f_r''(1) = 0$$

sowie

$$f_r'''(1) = \frac{3}{4}\left(r - \frac{2}{3}\right).$$

Für $r = 2/3$ ergibt sich aus (7):

$$3x^{4/3}(1+x^{2/3})^2 f_{2/3}''(x) = (1 - x^{1/3})^3$$

und somit für $x > 1$:

$$f_{2/3}''(x) < 0; \qquad f_{2/3}'(x) < f_{2/3}'(1) = 0; \qquad f_{2/3}(x) < f_{2/3}(1) = 0.$$

Damit ist die linke Seite von (5) bewiesen.

Nun zeigen wir, wenn r eine beliebige reelle Zahl ist mit $r > 2/3$, dann existieren Zahlen a und b $(b > a > 0)$, so dass die Ungleichung

$$\left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < [M_r(a,b)]^{b-a} \tag{8}$$

erfüllt ist.
Aus $f_r'''(1) > 0$ $(r > 2/3)$ folgt die Existenz einer Zahl $\delta > 0$, so dass für $x \in (1, 1+\delta)$ gilt: $f_r''(x) > f_r''(1) = 0$; also: $f_r'(x) > f_r'(1) = 0$ und $f_r(x) > f_r(1) = 0$ für $1 < x < 1 + \delta$, d.h. für alle positiven Werte a und b mit $1 < b/a < 1 + \delta$ gilt (8).
Wir beweisen nun die rechte Seite von (5). Zu diesem Zweck ersetzen wir in (6) (mit $r = \log 2$) die Variable x durch $z^{-1/\log 2}$ und zeigen, dass:

$$g(z) := \log(1+z) - \frac{z + z^{1/\log 2}}{1+z} \log 2 > 0 \quad \text{für} \quad 0 < z < 1.$$

Auf Grund von $g(0) = 0$ und $g'(0) > 0$ besitzt g in einer rechtsseitigen Umgebung von 0 ausschliesslich positive Funktionswerte. Wenn g in $(0,1)$ einen negativen Wert oder die Null annimmt, dann hat g in $[0,1]$ mindestens drei Nullstellen (da $g(1) = 0$), und nach dem Satz von Rolle besitzt g' in $(0,1)$ mindestens zwei Nullstellen. Dies ist jedoch unmöglich, denn für die Funktion

$$h(z) := (1+z)^2 g'(z)$$

gilt:

$$h''(z) > 0 \quad \text{für alle} \quad z \in (0,1); \quad h(0) > 0, \quad h(1/2) < 0, \quad h(1) = 0,$$

so dass h und somit g' im Intervall $(0,1)$ genau einmal verschwindet. Folglich ist für alle $z \in (0,1)$ die Ungleichung $g(z) > 0$ erfüllt, so dass

$$f_r'(x) > 0 \quad \text{für} \quad x > 1 \quad \text{und} \quad r = \log 2.$$

Hieraus folgt für $x > 1$: $f_r(x) > f_r(1) = 0$ $(r = \log 2)$; das ist die rechte Seite von (5).
Abschliessend haben wir zu zeigen, dass die rechte Seite von (3) nicht für alle Zahlen a und b $(b > a)$ richtig ist, wenn $\log 2$ durch einen kleineren Wert ersetzt wird.
Mit $b = a + 1$ in der Ungleichung

$$(e/a)^a (b/e)^b < [M_s(a,b)]^{b-a} \qquad (b > a > 0)$$

konvergiert der linke Ausdruck für $a \to 0$ gegen $1/e$, während $M_s(a, a+1)$ für $a \to 0$ gegen $2^{-1/s}$ strebt. Es ist daher $s \geq \log 2$.

Bemerkung: Die Ungleichungen (3) und die für alle $c > 0$ gültige Doppelungleichung:

$$\left(1 + \frac{1}{c}\right)^c \left(\frac{2(c+1)^s}{c^s + (c+1)^s}\right)^{1/s} < e < \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{c+1} \left(\frac{2c^r}{c^r + (c+1)^r}\right)^{1/r} \tag{9}$$

$(r = 2/3,\ s = \log 2)$
sind einander äquivalent. Mit $b = c + 1$ und $a = c > 0$ folgt nämlich (9) aus (3). Andererseits erhält man aus (9) die Ungleichungen (3), wenn man $c = a/(b-a)$, $b > a > 0$ einsetzt.
Die Ungleichungen (9) eignen sich zur numerischen Berechnung von e. Schon für $c = 1$ ergibt sich aus (9) der Wert von e auf zwei Dezimalstellen nach dem Komma.

Horst Alzer, Wuppertal

LITERATURVERZEICHNIS

1 H. Alzer: Über einen Wert, der zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen liegt. El. Math. *40*/1, 22–24 (1985).

2 N.D. Kazarinoff: Analytic Inequalities. New York 1961.

 0013-6018/85/060120-04$1.50 + 0.20/0

Zur Unauflösbarkeit der symmetrischen Gruppe $S_n (n > 4)$

Beim Beweis des Satzes von Ruffini-Abel spielt die Tatsache, dass $S_n (n > 4)$ nicht auflösbar ist, eine wichtige Rolle. Für diese Tatsache liefert diese Note einen extrem kurzen und einfachen Beweis. Dabei umgehen wir den nicht sehr angenehmen Beweis der Einfachheit der alternierenden Gruppe $A_n \subset S_n$ und verwenden A_n überhaupt nicht ausdrücklich bei unserer Beweisführung.
Wir beginnen damit, dass wir in S_n die Untergruppe G aller Produkte einer geraden Anzahl von Transpositionen (ik) betrachten. (Dass $G = A_n$ ist, ist hier belanglos!) Ist nun $n > 4$, so zeigt der Kommutator

$$(il)(ij) \cdot (im)(ik) \cdot (ij)(il) \cdot (ik)(im) = (ijk)$$

in G, dass die Kommutatorgruppe G' von G alle 3-Zyklen (ijk) enthält. Wegen $(ij)(ik) = (ikj)$ und $(ij)(kl) = (ikl)(ijl)$ erzeugen die (ijk) aber bereits G, weshalb $G = G'\ (\neq 1)$ besteht. Daher ist $G \subset S_n$ und somit S_n nicht auflösbar.

Karlheinz Baumgartner
Voitsberg (Österreich)

 0013-6018/85/060123-01$1.50 + 0.20/0