

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **40 (1985)**

Heft 6

PDF erstellt am: **30.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Aufgaben

**Aufgabe 914.** Man bestimme für beliebiges  $n \in \mathbf{N}$  die Mächtigkeit der Menge

$$A_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}^n \mid 0 \leq x_i \leq i \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } \sum_{i=1}^n x_i = n \right\}.$$

W. Janous, Innsbruck, A

**Lösung:** Die Referenzmenge für den Summanden  $x_i$  lautet  $R_i = \{0, 1, 2, \dots, i\}$ . Für die Menge  $F$  der möglichen Partitionen von  $n$  gilt dann

$$F \sim R_1 \times R_2 \times R_3 \times \dots \times R_n.$$

$R_i$  ist eine Figurenmenge mit der abzählenden Potenzreihe

$$f_i(x) = \sum_{r \in R_i} x^r = 1 + x + x^2 + \dots + x^i = \frac{1 - x^{i+1}}{1 - x}.$$

Damit erhält man für die abzählende Potenzreihe von  $F$

$$f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x) = \prod_{i=1}^n (1 - x^{i+1}) / (1 - x)^n.$$

Die Mächtigkeit von  $A_n$  ist der Koeffizient von  $x^n$ .

Mit dem Eulerschen Pentagonalzahlsatz in der Sprache der formalen Potenzreihen

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x^{k(3k-1)/2} + x^{k(3k+1)/2})$$

und der Umformung

$$f(x) = \prod_{i=1}^n (1 - x^i) / (1 - x)^{n+1} = \prod_{i=1}^n (1 - x^i) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k$$

erhält man für den gesuchten Koeffizienten

$$|A_n| = \binom{2n}{n} + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left[ \binom{2n - k(3k-1)/2}{n} + \binom{2n - k(3k+1)/2}{n} \right]$$

Dabei sind von der Summe nur die Terme zu berücksichtigen, für die  $2n \geq k(3k-1)$  bzw.  $2n \geq k(3k+1)$  wird.

### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik II, S. 101 bzw. 119, Stuttgart 1976.

Weitere Lösungen sandten J. C. Binz (Bolligen), P. Bundschuh (Köln, BRD), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL, 2 Lösungen), Chr. A. Meyer (Ittingen). Eine Lösung war fehlerhaft.

**Aufgabe 915.** Für  $n \in \mathbf{Z}$  bezeichne  $f_n: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$  eine multiplikative arithmetische Funktion mit folgender Eigenschaft: Für alle Primzahlen  $p$  und alle Exponenten  $k \in \mathbf{N}$  gilt

$$f_n(p^k) = \binom{n}{k}.$$

Man bestimme die Konvergenzabszisse sowie die Summe der Dirichletschen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) k^{-s}.$$

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung: Schreibt man jedes  $k \in \mathbf{N}$  eindeutig in der Form

$$\prod_{p|k} p^{e_p(k)}, \quad \text{so ist} \quad f_n(k) = \prod_{p|k} f_n(p^{e_p(k)}) \quad \text{und daher}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{p|k} \binom{n}{e_p(k)} p^{-se_p(k)} = \prod_p \sum_{e=0}^{\infty} \binom{n}{e} p^{-se} = \prod_p (1 + p^{-s})^n = (\zeta(s)/\zeta(2s))^n$$

bei beliebigem  $n \in \mathbf{Z}$ . Die Konvergenzabszisse der vorgegebenen Dirichlet-Reihe ist 1 für  $n \neq 0$  und  $-\infty$  für  $n = 0$ .

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten J. C. Binz (Bolligen), W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

**Aufgabe 916.** Es bezeichnen  $a, b, c$  die Seiten,  $r_a, r_b, r_c$  die Ankreisradien,  $2s$  den Umfang und  $r$  den Inkreisradius eines ebenen Dreiecks. Ferner sei

$$S := \frac{r_b + r_c}{b + c} + \frac{r_c + r_a}{c + a} + \frac{r_a + r_b}{a + b}.$$

Man schätze  $S$  nach unten sowie  $rS/s$  nach oben bestmöglich ab.

D. M. Milošević, Pranjani, YU

Lösung: Wir zeigen, dass

$$S \geq 3\sqrt{3}/2 \quad \text{und} \quad rS/s \leq 1/2$$

mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck gilt.

Beweis:

Wegen

$$(r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_b + r_c) = 4Rs^2$$

und

$$3\sqrt{3}R \geq 2s$$

(Ungleichung 5.3 in [1]) bzw. der unmittelbar daraus folgenden Ungleichung

$$4Rs^2 \geq 8s^3/(3\sqrt{3}) = (2s/\sqrt{3})^3$$

ergibt sich mit dem arithmetischen-geometrischen und -harmonischen Mittel

$$S \geq 3 \sqrt[3]{\frac{4Rs^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}} \geq 3 \frac{2s}{\sqrt{3}} \frac{3}{2(a+b+c)} = 3\sqrt{3}/2$$

und damit der erste Teil der Behauptung.

Wegen  $(a+b)^2 \geq 4ab$  erhält man

$$1/(a+b)^2 + 1/(a+c)^2 + 1/(b+c)^2 \leq \frac{a+b+c}{4abc} = \frac{1}{8rR}.$$

Da  $(r_a + r_b)^2 + (r_a + r_c)^2 + (r_b + r_c)^2 = 2((r + 4R)^2 - s^2)$  ist, ergibt sich mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$S \leq \sqrt{((r + 4R)^2 - s^2)/(4Rr)}.$$

Damit bleibt für den zweiten Teil der Behauptung zu zeigen:

$$(r + 4R)^2 - s^2 \leq s^2R/r.$$

Nach Umformen in  $s^2(1 + R/r) - (r + 4R)^2 \geq 0$  und Heranziehen der Ungleichung 5.8 in [1] ( $s^2 \geq r(16R - 5r)$ ) erscheint die sicher richtige Ungleichung

$$3r(R - 2r) \geq 0.$$

Bei allen Abschätzungen gilt Gleichheit genau für  $a = b = c$ .

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 O. Bottema et al.: Geometric Inequalities. Groningen 1969.

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU), P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1986* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 932.** Es sei

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} t^{2n-3k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Man untersuche das Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten der Zahlenfolge  $(a_n)$  in Abhängigkeit vom reellen Parameter  $t$ .

J. C. Binz, Bolligen

**Aufgabe 933.**  $m$  und  $n$  seien nichtnegative ganze Zahlen. Die Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  sei  $n$ -mal stetig differenzierbar, und es gelte

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1 \quad (1)$$

sowie

$$\int_0^1 x^j f(x) dx = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Man zeige, dass

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq (2n+1) \left[ \frac{n!m!}{(2n+m+1)!} \right]^2 \cdot \int_0^1 [f^{(n)}(x)]^2 dx.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

**Aufgabe 934.** Man beweise für natürliche Zahlen  $n$  die Ungleichung

$$2 \arctan \frac{1}{2n-1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

P. Ivady, Budapest, Ungarn