

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **41 (1986)**

Heft 1

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Mit  $t := \frac{1}{2} \log \frac{b}{a} > 0$  lässt (3) sich auch umformen zu der elementaren Ungleichungskette

$$\frac{1}{\sinh t} < \frac{1}{t} < \frac{\left(\cosh \frac{t}{3}\right)^3}{\sinh t} < \frac{\left(\cosh \frac{t}{2}\right)^2}{\sinh t} < \frac{1}{\tanh t}.$$

b)  $f = \exp$

$$e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^a - e^b}{a - b} < \left(\frac{e^{\frac{a}{3}} + e^{\frac{b}{3}}}{2}\right)^3 < \left(\frac{e^{\frac{a}{2}} + e^{\frac{b}{2}}}{2}\right)^2 < \frac{e^a + e^b}{2}$$

Dieter Rüthing, Paderborn, BRD

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J. Dieudonné: Grundzüge der modernen Analysis. Vieweg-Verlag, Braunschweig 1972.
- 2 E. R. Love: Some logarithm inequalities. Math. Gaz. 64, 55–57 (1980).
- 3 D. S. Mitrinović: Analytic Inequalities. Springer Verlag, New York–Heidelberg–Berlin 1970.
- 4 D. Rüthing: A derivation of some classical inequalities from the mean value theorem. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 15, 653–659 (1984); 16, 149 (1985).

**Nachtrag der Redaktion.** Bei der Drucklegung dieser Kleinen Mitteilung sind wir auf eine Note von T. P. Lin (The power means and the logarithmic mean; Am. Math. Monthly 81 (1974), p. 879–883) aufmerksam geworden, in der aus der Ungleichung

$$\sqrt{ab} < \frac{a - b}{\log a - \log b} < \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2}\right)^3, \quad \text{für } a > 0, b > 0, a \neq b$$

die Abschätzung (1) mit wesentlich schwächeren Restriktionen für  $f$  gefolgert wird. Es genügt, dass  $f$  positiv und  $f(a) \neq f(b)$  ist.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/060014-03\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 917.** Man betrachte die Menge aller einem gegebenen Dreieck  $ABC$  einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke  $A'B'C'$  mit  $A' \in \overline{BC}$ ,  $B' \in \overline{CA}$ ,  $C' \in \overline{AB}$  und den Seitenmitten  $L \in \overline{B'C'}$ ,  $M \in \overline{C'A'}$ ,  $N \in \overline{A'B'}$ .

Man zeige:  $L, M, N$  liegen auf je einer festen Geraden  $l, m, n$ .

L. Kuipers, Sierre

**Lösung:** Wir betrachten allgemeiner eine Schar zueinander ähnlicher Dreiecke  $A'B'C'$  mit  $A' \in \overline{BC}$ ,  $B' \in \overline{CA}$ ,  $C' \in \overline{AB}$  und zeigen: Jede Menge von einander entsprechenden Punkten dieser Dreiecke liegt auf einer jeweils festen Geraden.

Zum Beweis sei  $A$  als Nullpunkt der komplexen Ebene gewählt. O. B. d. A. sei  $\sphericalangle BAC + \sphericalangle B'A'C' \neq \pi$  angenommen. Bezeichnen wir noch mit  $a, a', \dots$  die den Punkten  $A, A', \dots$  entsprechenden komplexen Zahlen, so gilt für jedes der betrachteten Dreiecke mit geeigneten  $x, y, z \in \mathbf{R}$ :

$$a' = b + x(c - b), \quad b' = yc, \quad c' = zb. \quad (1)$$

Wegen der Ähnlichkeit gilt mit einem festen  $\lambda \in \mathbf{C}$ :

$$(b' - a')\lambda = c' - a' \Leftrightarrow -\lambda b' + c' = (1 - \lambda)a'. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\begin{aligned} -\lambda cy + bz &= (1 - \lambda)b + (1 - \lambda)(c - b)x \\ -\bar{\lambda}\bar{c}\bar{y} + \bar{b}\bar{z} &= (1 - \bar{\lambda})\bar{b} + (1 - \bar{\lambda})(\bar{c} - \bar{b})x. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann nach  $y$  und  $z$  aufgelöst werden. Für die Determinante  $D$  des Systems gilt nämlich:

$$D = -2i \cdot \operatorname{Im}(\lambda c \bar{b}) \neq 0,$$

weil

$$\arg(\lambda c \bar{b}) = \arg \lambda + \arg(c \bar{b}) = \sphericalangle B'A'C' + \sphericalangle BAC \neq \pi.$$

$y, z$  und damit auch  $b', c'$  hängen linear von  $x$  ab.

Eine Menge von einander entsprechenden Punkten der ähnlichen Dreiecke  $A'B'C'$  besteht aus Punkten  $P$ , für die gilt:

$$p = a' + s(b' - a') + t(c' - a'),$$

wobei  $s, t$  feste, reelle Zahlen sind. Weil  $a', b', c'$ , linear von  $x$  abhängen, gilt dies auch für  $p$ , woraus die Behauptung folgt.

P. Streckeisen, Zürich

Weitere Lösungen sandten G. Bercea (München, BRD), K. Bickel (Nürtingen, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht), J. Binz (Bollingen), H. Frischknecht (Berneck), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), W. Raffke (Vechta, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), H. Walser (Frauenfeld), K. Warnecke (Vechta, BRD).

**Aufgabe 918.** Die Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$  werde von  $n$  Kreisen  $k_i$  mit Radius  $r_i$  je in zwei Punkten berührt ( $i = 1, \dots, n; n \geq 3$ ). Man bestimme  $r_1$  als Funktion von  $n$  so, dass  $k_i$  seine beiden Nachbarkreise  $k_{i-1}$  und  $k_{i+1}$  berührt ( $i = 2, \dots, n-1$ ) und dass  $r_n = r_1$  wird.

C. Bindschedler, Küsnacht

**Lösung:** Für ungerades  $n$  hat der mittlere Kreis der Kreiskette seinen Mittelpunkt in  $(0/0)$  und den Radius 1. Setzt man die Diskriminante der aus  $x^2 - y^2 = 1$  und  $x^2 + (y - b)^2 = r^2$  entstehenden quadratischen Gleichungen gleich Null, so erhält man für die Radien der Kreise, die die Kreiskette von der Mitte her aufbauen, die Rekursionsformel

$$x_1 = 1, \quad x_3 = 3, \quad x_n = 6x_{n-2} - x_{n-4}, \quad n = 5, 7, 9, \dots$$

Für gerades  $n$  sind die Radien der beiden inneren Kreise der Kreiskette jeweils  $\sqrt{2}$ , und man erhält durch analoge Rechnung dieselbe Rekursionsformel mit den Anfangsgliedern

$$x_2 = \sqrt{2}, \quad x_4 = 5\sqrt{2}.$$

Schliesslich erhält man nach den bekannten Methoden die für alle  $n$  gültige Beziehung

$$r_1(n) = \frac{1}{2} ((\sqrt{2} + 1)^{n-1} + (\sqrt{2} - 1)^{n-1}).$$

M. Vowe, Therwil

Weitere Lösungen sandten H. Frischknecht (Berneck), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), V. D. Mascioni (Origlio), Hj. Stocker (Wädenswil), H. Walser (Frauenfeld), K. Warnecke (Vechta, BRD).

**Aufgabe 919.** Mit den üblichen Bezeichnungen für das ebene Dreieck (siehe O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Groningen 1969) schätze man den Ausdruck

$$a \tan(\alpha/2) + b \tan(\beta/2) + c \tan(\gamma/2)$$

durch möglichst einfache Funktionsterme  $f(r, R), F(r, R)$  bestmöglich nach unten und oben ab.

D. M. Milosevic, Pranjani, YU

Bemerkung der Redaktion: Der abzuschätzende Ausdruck hat, wie leicht zu sehen, den Wert  $4R - 2r$ . Die Aufgabe ist somit trivial. Es gingen 15 Lösungen ein.

Bemerkung zu Aufgabe 909: Eine weitere Lösung sandte I. Paasche (Stockdorf, BRD).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. August 1986* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 935.** Man bestimme alle Lösungen der diophantischen Gleichung

$$x^y - y^x = z$$

in natürlichen Zahlen  $x, y, z$  mit  $z \leq 1986$ .

P. Bundschuh, Köln, BRD

**Aufgabe 936.** Mit der  $(r + 1)$ -gliedrigen arithmetischen Folge  $c_i = a + id$  ( $a, d$  ganz,  $a \geq 0, d \geq 1, i = 0, 1, 2, \dots$ ) definieren wir das Polynom  $p(x) = \prod_{i=0}^r (1 - c_i x)$ .  $p(x)$  ist im Ring der formalen Potenzreihen über  $Q$  invertierbar. Man bestimme die Koeffizienten  $b_n$  in der Reihe  $[p(x)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  und gebe für die Zahlen  $b_n$  eine kombinatorische Interpretation an.

J. Binz, Bolligen

**Aufgabe 937.** Man schätze für die Innenwinkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  eines Dreiecks die Summe

$$S := \sum_{k=1}^3 (\sin 3\alpha_k - \sin 2\alpha_k + \sin \alpha_k)$$

bestmöglich nach oben ab. – Hinweis: Gemäss Aufgabe 716, El. Math. 30 (1975), S. 43, gilt  $S \geq 0$  mit Gleichheit im gleichseitigen Fall.

Hj. Stocker, Wädenswil

**Aufgabe 872A.** Es seien  $r_1, \dots, r_n, n > 1$ , die Radien von  $n$  Kreisen im Einheitsquadrat  $Q = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$ , die keinen gemeinsamen inneren Punkt haben und alle die  $x$ -Achse berühren.

Ferner sei  $S_n := r_1 + \dots + r_n$ . In einem alten Notizbuch behaupte ich:  $S_n < C \log n$ , aber  $S_n > C \log n / \log \log n$  ist noch möglich.

P. Erdős

*Solution by O. P. Lossers, Eindhoven University of Technology, Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven, The Netherlands*

Throughout this solution all circles are supposed to be situated inside the unit square and to have the  $X$ -axis as a tangent line. Moreover, any two circles are supposed to have disjoint interiors.

I. Let  $n$  circles be given with radii

$$r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq r_4 \geq r_5 \geq \dots$$

Observe that for any pair  $(t, r)$ ,  $0 < t \leq r$ , a circle of radius  $r$  has a segment of length  $\geq 2t$  in common with the line  $y = t$ .

Consequently the union of the first  $k$  circles has segments in common with the line  $y = r_k$ , that have a total length of  $k \cdot 2r_k$  at least.

Therefore  $k \cdot 2r_k \leq 1$ , or  $r_k \leq (2k)^{-1}$ , so that

$$\sum_{k=1}^n r_k = \frac{1}{2} \log n + o(1).$$

This proves the first part of the assertion.

II. As a consequence of Pythagoras' theorem we see that two tangent circles with radii  $r$  and  $s$  have tangent points on the  $X$ -axis whose distance is equal to  $2\sqrt{rs}$ . So between any two tangent circles with radii  $r$  and  $s$  there can be interpolated a common tangent circle whose radius  $t$  is determined by

$$2\sqrt{rs} = 2\sqrt{st} + 2\sqrt{rt},$$

i. e.,

$$t^{-\frac{1}{2}} = r^{-\frac{1}{2}} + s^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Now we construct the following set of circles:

Start with the two unique tangent circles of radius  $\frac{1}{4}$ , and form all other circles by repeated application of the interpolation process.

It is useful to label each circle by half the inverse of the square root of its radius. In other words, the starting circles both get index 1 and, by (1), the first interpolating circle gets index  $1 + 1 = 2$ . We can also say, by (1), that a pair of tangent circles with indices  $a$  and  $b$  (which we indicate by  $(a, b)$ ) generates two pairs of tangent circles with indices  $(a, a + b)$  and  $(a + b, b)$ , respectively.

In this way we get a binary tree of ordered pairs of tangent circles



It is clear that for all index pairs  $(a, b)$  in our tree diagram we have  $\text{g.c.d.}(a, b) = \text{g.c.d.}(1, 1) = 1$ . We claim that all index pairs  $(a, b)$  satisfying  $\text{g.c.d.}(a, b) = 1$  occur in the tree diagram.

For, let  $(u, v)$  be the pair with minimal sum  $u + v$  that does not occur in (2). Without loss of generality we assume that  $u < v$ . Then the pair  $(u, v - u)$  occurs in (2) because it has a smaller sum and hence  $(u, v - u + u)$  occurs in (2). Contradiction.

(In fact: it follows that every pair  $(a, b)$  satisfying  $\text{g.c.d.}(a, b) = 1$  occurs in (2) exactly once.)

Now recall that every pair of tangent circles with index pair  $(a, b)$  generates, by one interpolation, a circle of radius  $\frac{1}{4}(a + b)^{-2}$ . Summarizing, we must conclude that our set of circles consists of two circles of radius  $\frac{1}{4}$  and  $\varphi(k)$  circles of radius  $\frac{1}{4k^2}$ , where  $\varphi$  is Euler's totient function ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ).

From T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag (1976), p. 70, 71, we borrow the results

$$\sum_{k \leq x} \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x) \quad (x \rightarrow \infty) \tag{3}$$

and

$$\sum_{k \leq x} \frac{\varphi(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} \log x + O(1) \quad (x \rightarrow \infty) \tag{4}$$

so that for the sum of the radii of the first  $n$  ( $n = \sum_{k \leq x} \varphi(k)$ ) circles in our set we clearly obtain

$$\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{k \leq x} \frac{\varphi(k)}{4k^2} = \frac{3}{4\pi^2} \log n + O(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

This result clearly is an improvement of the second part of the assertion.