Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **41 (1986)**

Heft 2

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Bemerkung zur kleinen Mitteilung von H. Alzer in El. Math. Vol. 40 (1985), p. 22–24

In unabhängigen Zuschriften an die Redaktion haben der Autor H. Alzer (Waldbröl) und H. J. Seiffert (Berlin) darauf hingewiesen, dass die für $b > a > 0$ bewiesene Ungleichung

$$(\sqrt{ab})^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < \left(\frac{a+b}{2}\right)^{b-a} \qquad (*)$$

auch als Spezialfall der Ungleichung

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad \text{falls } f\colon [a,b] \to R \text{ streng konkav}$$

erhalten werden kann. Setzt man darin $f(x) = \ln x$, so ergibt sich fast unmittelbar die Ungleichung (*).

Die Redaktion

Aufgaben

Aufgabe 920. In der kubischen Gleichung

$$x^3 - cx^2 + \bar{c}x - 1 = 0$$

ist der Koeffizient c eine komplexe Zahl und $\bar{c}$ die konjugiert komplexe. Man finde die Menge der Zahlen c, für welche die Wurzeln der Gleichung den Betrag 1 haben.

A. Pfluger, Zürich

Solution: The problem is clearly to investigate for which values of c there exist two real numbers φ and ψ such that

$$z^3 - cz^2 + \bar{c}z - 1 = (z - e^{i\varphi})(z - e^{i\psi})(z - e^{-i(\varphi+\psi)}),$$

in other words, we have to analyze the set V defined by

$$\begin{aligned} V := &\ \{e^{i\varphi} + e^{i\psi} + e^{-i(\varphi+\psi)} \mid \varphi, \psi \in \mathbf{R}\} \\ = &\ \{e^{i\varphi} + 2e^{-\frac{1}{2}i\varphi}\cos(\psi + \tfrac{1}{2}\varphi) \mid \varphi, \psi \in \mathbf{R}\} \\ = &\ \{e^{i\varphi} + se^{-\frac{1}{2}i\varphi} \mid \varphi \in \mathbf{R};\ -2 \leqslant s \leqslant 2\}. \end{aligned}$$

Apparently V is the union of certain line segments of length 4.
Now consider the hypocycloid H defined in parametric form by

$$H : w(\varphi) = e^{i\varphi} + 2e^{-\frac{1}{2}i\varphi} \quad (\varphi \in \mathbf{R})$$

For arbitrary φ_0 the points $w(\varphi_0) = e^{i\varphi_0} + 2e^{-\frac{1}{2}\varphi_0}$ and $w(\varphi_0 + 2\pi) = e^{i\varphi_0} - 2e^{-\frac{1}{2}\varphi_0}$ are the end points of such a line segment l, whereas

$$\begin{aligned} w(-2\varphi_0) &= e^{i\varphi_0} + 2e^{i\varphi_0} \\ &= e^{i\varphi_0} + (e^{i\varphi_0} + e^{-2i\varphi_0}) = e^{i\varphi_0} + 2e^{-\frac{1}{2}i\varphi_0}\cos(\tfrac{3}{2}\varphi_0) \end{aligned}$$

is an intermediate point, in which

$$w'(\varphi)_{\varphi=-2\varphi_0} = 2e^{-\frac{1}{2}i\varphi_0}\sin(\tfrac{3}{2}\varphi_0),$$

so that l is tangent to H in the point $w(-2\varphi_0)$.
Summarizing we find that V is the hypocycloid H together with its interior.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), J. Binz (Bolligen), P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), F. Sigrist (Neuchâtel), P. Streckeisen (Zürich), Hj. Stocker (Wädenswil, 2 Lösungen), M. Vowe (Therwil), H. Walser (Frauenfeld), K. Warnecke (Vechta, BRD), R. Wyss (Flumenthal). Eine Lösung war falsch.

Aufgabe 921. Mit den üblichen Bezeichnungen für das ebene Dreieck (siehe O. Bottema et al., Geometric Inequalities, Groningen 1969) zeige man:

$$\begin{aligned} 2^{n-1}\cdot 3^{(n+3)/2}\cdot r^n &\leqslant a^n\cos\frac{\alpha}{2} + b^n\cos\frac{\beta}{2} + c^n\cos\frac{\gamma}{2} \\ &\leqslant \left[\frac{3}{2}s\,(a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1})\right]^{1/2}, \qquad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Wann genau gilt Gleichheit?

D. M. Milosevic, Pranjani, YU

Lösung: Zur Vereinfachung verabreden wir für eine beliebige Funktion f die Schreibweise

$$\sum f(a,b,c;\alpha,\beta,\gamma) := f(a,b,c;\alpha,\beta,\gamma) + f(b,c,a;\beta,\gamma,\alpha) + f(c,a,b;\gamma,\alpha,\beta).$$

Wir beweisen folgende Verschärfung:

$$3^{1/2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} s^n \leq \quad a^n\cos\frac{\alpha}{2} \leq \left[s\left(1+\frac{r}{R}\right)\cdot \quad a^{2n-1}\right]^{1/2}, \qquad n \geq 1.$$

(Dies *ist* eine Verschärfung wegen der bekannten Beziehungen $3^{3/2}r \leq s$ und $\left.\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}\right)$.

Sei $n \geq 1$. Wenden wir die Tschebyscheffsche Ungleichung (nach unten) und die Schwarzsche Ungleichung (nach oben) auf den mittleren Term an, so ergibt sich

$$(*)\ \left(\frac{1}{3} \quad a\right)\left(\quad a^{n-1}\cos\frac{\alpha}{2}\right) \leq \quad a^n\cos\frac{\alpha}{2} \leq \left[\left(\quad a\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\quad a^{2n-1}\right)\right]^{1/2}.$$

Aus der ersten Ungleichung und durch vollständige Induktion ergibt sich sofort

$$3^{1/2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} s^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n s^n \cdot \sum \cos\frac{\alpha}{2} \leq \sum a^n \cos\frac{\alpha}{2}\cdot$$

Betrachten wir jetzt die zweite Ungleichung von (*). Es gilt

$$\sum a \cos^2\frac{\alpha}{2} = s \cdot \sum \frac{a(s-a)}{bc} = \frac{s}{2}\cdot\sum\left(-\frac{a^2}{bc}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right) = \frac{s}{2}\cdot\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{c^2}{ab}\right)$$
$$= \frac{s}{2}\cdot\sum\frac{a^2+b^2-c^2}{ab} = s\cdot\sum\cos\alpha = s\left(1+\frac{r}{R}\right),$$

und daraus folgt sofort die Behauptung. Es ist klar, dass *alle* Ungleichungen in dieser Lösung genau dann Gleichheiten werden, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

V. D. Mascioni, Origlio

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU), P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), M. S. Klamkin (Edmonton, CD), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 922. Es seien m, n gegebene natürliche Zahlen. Man beweise oder widerlege folgende Aussage: Für unendlich viele Primzahlen p gilt

$$\left(\binom{pm}{m}, n\right) = 1.$$

L. Kuipers, Sierre

Lösung: Die Aussage ist wahr.
Einem bekannten Satz von Dirichlet zufolge gibt es unendliche viele Primzahlen p der Form

$$p = Am!n + 1 \qquad (A \in \mathbf{N}).$$

Für solche Zahlen hat

$$pm(pm-1)\ldots(pm-m+1)$$

die Form $Cm!n + m!$, $(C \in \mathbf{N})$
und deshalb ist $\binom{pm}{m} = Cn + 1$.

O. P. Lossers Jr., Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten G. Behrendt (Tübingen, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), Chr. A. Meyer (Ittigen), F. Sigrist (Neuchâtel).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1986* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 938. Die folgenden Summen:

$$S_0(m,n) := \sum_{s=0}^{n} \binom{2n+1}{2s}\binom{2n+m-s}{2n}$$

$$S_1(m,n) = \sum_{s=0}^{n} \binom{2n+2}{2s+1}\binom{2n+1+m-s}{2n+1}, \qquad m,n \in \mathbf{N}$$

sind geschlossen auszuwerten.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 939. Man bestimme den geometrischen Ort der Lotfusspunkte aus einem Pol O auf den Verbindungsgeraden der Schnittpunkte, welche die Schenkel eines variablen Winkels mit Scheitel O von fester Grösse mit zwei gegebenen nicht durch O verlaufenden Geraden besitzen.

G. Unger, Dornach

Aufgabe 940. Bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem seien $A = (a,0)$, $B = (0,b)$, $C = (c,0)$, $D = (0,d)$ mit $a \neq c$, $b \neq d$ und $abcd > 0$ die Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, und es bezeichne k das Achsenverhältnis einer beliebigen Ellipse des Büschels, $k \geqslant 1$. Man ermittle das Minimum von k.

C. Bindschedler, Küsnacht
H. Kappus, Rodersdorf

Literaturüberschau

R. Narasimhan: Complex Analysis in One Variable, XVI und 266 Seiten, Fr. 84.–. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1985.
Dieses Buch behandelt die klassische Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen im Zusammenhang mit anderen Gebieten der Mathematik. Ein kurzes Kapitel ist den Funktionen von mehreren komplexen Variablen gewidmet. Methoden der reellen Analysis werden beim Beweis des Corona-Theorems verwendet. Jedes der insgesamt elf Kapitel schliesst mit interessanten historischen Anmerkungen und einem nützlichen Literaturverzeichnis.
Das Werk kann von fortgeschrittenen Studenten als Lehrbuch der Funktionentheorie benutzt werden. Es enthält zahlreiche moderne Resultate, welche man in den üblichen Einführungen vergeblich sucht. C. A. Meyer