

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 41 (1986)
Heft: 3

Artikel: Über die weitere Entwicklung der Funktionalanalysis bis 1932
Autor: Kreyszig, Erwin
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39468>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 41

Nr. 3

Seiten 49–80

Basel, 10. Mai 1986

Über die weitere Entwicklung der Funktionalanalysis bis 1932

1. Einleitung

An die Untersuchung «Zur Entwicklung der zentralen Ideen in der Funktionalanalysis» [8] anschliessend, wird in der vorliegenden Arbeit die Periode von 1906 bis 1932 betrachtet, innerhalb der sich die Funktionalanalysis zu einem eigenständigen Gebiet der Mathematik entwickelt.

Die in der genannten Arbeit gegebene Motivierung braucht hier nicht wiederholt zu werden. Wohl aber sei nochmals betont, dass manches aus Platzgründen entfallen muss, und es sei betreffs Ergänzungen wiederum auf die Arbeit [3] hingewiesen.

2. Fréchets Dissertation von 1906

Fréchets Dissertation «Sur quelques points du Calcul fonctionnel» (Rend. Palermo 22, 1–74) von 1906 bildet den Beginn der eigentlichen Entwicklung der Funktionalanalysis (metrische, Banach- und Hilberträume und deren Operatoren). Fréchet führt darin (S. 30) den *metrischen Raum* (Hausdorffs Bezeichnung von 1914 [4, S. 211]) ein, der er *classe* (E) nennt, weil er die Entfernung von A nach B als *écart* (A, B) bezeichnet. Wichtig ist dabei erstens, dass er den metrischen Raum *axiomatisch* definiert, und zweitens, dass er diejenigen Axiome einführt, die man bis heute unverändert benutzt; Fréchet schreibt (S. 18, 30)

$$\begin{aligned}(A, B) &\geq 0, & (A, B) = 0 \text{ genau für } A = B \\ (A, B) &= (B, A), & (A, B) \leq (A, C) + (C, B).\end{aligned}$$

Eine Überschrift auf S. 6 lautet «Les définitions usuelles de la théorie des ensembles ponctuels étendues aux ensembles abstraits» und deutet den Leitgedanken seiner allgemeinen Theorie an, die Übertragung von grundlegenden Begriffen und Sätzen (Arzelà-Ascoli, Arzelà's Sätze über Folgen von Kurven u. dgl.) von «konkreten» Mengen von Punkten im \mathbf{R}^n oder Kurvenfamilien auf beliebige *abstrakte* Mengen. Insbesondere definiert Fréchet die Begriffe der Vollständigkeit, Folgenkompaktheit und Separabilität (S. 6, 22, 23) und erkennt klar deren Bedeutung.

Im 2. Teil der Dissertation über Anwendungen (S. 34 – Schluss) bespricht Fréchet wichtige spezielle Räume, insbesondere $C[a, b]$ mit Hinweis auf Weierstrass (S. 36), Folgen-

räume (S. 40, 44), Räume holomorpher Funktionen (S. 45–51), Räume von Kurven, zum Teil im Anschluss an Arzelà (S. 51–67) usw. Die Gedankenfülle dieser Dissertation des damals 27- oder 28jährigen und die Thematik seiner vorangehenden Arbeiten von 1904–06 zeigen den Einfluss seines Lehrers Hadamard; wie weit dieser reichte, bleibt auch bei Taylor [14] offen.

Dass man kurz nach der Jahrhundertwende, vor allem angespornt durch die weiten Möglichkeiten, die die Mengenlehre eröffnete, und durch die Probleme und Methoden der Variationsrechnung, auf der Suche nach einem allgemeinen abstrakten Raumbegriff war, zeigen auch die Versuche von F. Riesz von 1906 («Die Genesis des Raumbegriffs», vorgetragen im Januar 1906; s. [10, S. 110–154]) und 1908 («Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre», Internat. Kongress Math. Rom 2, 18–24). Die weitere Entwicklung, die 1914 zum *topologischen Raum* führt (Hausdorff [4, S. 213]), wurde aber hauptsächlich von Fréchets metrischem Raum beeinflusst; man vergleiche hierzu Fréchets Gedanken auf S. 30–31 der Dissertation mit den Motivierungen Hausdorffs [4, S. 209–13], der für die Idee seiner bekannten Umgebungsaxiome (und des Hausdorffschen Trennungsaxioms) wohl vom metrischen Fall her entscheidende Anregungen gewann. In unserem Zusammenhang bedeutsam sind weiterhin Hausdorffs Abzählbarkeitsaxiome [4, S. 260–75], die später zur Lösung des Metrisierungsproblems führten [3, S. 299]. Es dauerte dann noch 10 Jahre bis zu der Erkenntnis, dass offene Mengen als Grundbegriff des topologischen Raumes oft günstig sind [H. Tietze, Math. Ann. 88, 290–312 (1923), P. Alexandroff (1925)], eine Auffassung, der sich später auch Bourbaki anschloss.

3. Hilberts Spektraltheorie

Um dieselbe Zeit, während der Fréchet seine ersten Arbeiten und dann 1906 seine Dissertation veröffentlichte, begann sich ganz unabhängig von Italien und Paris unter der Führung von David Hilbert (1862–1943) in Göttingen ein weiteres Zentrum der entstehenden Funktionalanalysis zu entwickeln. Die unmittelbare Anregung ging dabei vor allem von Fredholms Untersuchungen über Integralgleichungen aus, die wir am Ende unserer vorigen Arbeit betrachtet haben.

Als Hilbert von Fredholms Erfolgen hört, «fängt er sofort Feuer» (wie H. Weyl es ausdrückte). Von 1904 bis 1910 veröffentlicht er in den Göttinger Nachrichten 6 Mitteilungen über Integralgleichungen, die 1912 auch als Buch «Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen» [6] erscheinen. Hilbert geht es vor allem um die *Spektraltheorie* für den Fall *symmetrischer* Kerne. Er weist zuerst (S. 2 des Buches) auf die lange Geschichte der klassischen Spektraltheorie hin und fährt dann fort, seine Untersuchung werde zeigen,

«... daß die Theorie der Entwicklung willkürlicher Funktionen durchaus nicht die Heranziehung von ... Differentialgleichungen erfordert, sondern daß die *Integralgleichung* es ist, die die notwendige Grundlage ... für eine Theorie der Reihenentwicklung bildet ...». Die funktionalanalytisch (und auch prinzipiell) wichtigste der 6 Mitteilungen Hilberts ist die 4. vom Jahre 1906, und ein Vergleich mit der 1. vom Jahre 1904 zeigt in Hilberts Werk einen interessanten Stilwandel vom «Klassischen» zum «Funktionalanalytischen». In der Tat geht Hilbert in der 1. Mitteilung von einer «konkreten» Fredholm-Gleichung

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^1 k(s,t)\varphi(t) dt = f(s), \quad k(s,t) = k(t,s)$$

mit *symmetrischem*, stetigem Kern k aus. Unter Approximation des Integrals durch Summen erhält er ein lineares algebraisches Gleichungssystem

$$x_p - \frac{\lambda}{n} \sum_{q=1}^n k_{pq} x_q = y_p, \quad k_{pq} = k_{qp} = k\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right), \quad (p = 1, \dots, n).$$

Mit dessen Koeffizienten bildet er eine quadratische Form Q_n und – dies ist die Hauptidee – transformiert diese orthogonal auf Hauptachsen,

$$Q_n(x) = \sum_{p,q=1}^n k_{pq} x_p x_q = \sum_{v=1}^n \frac{n}{\lambda_v^{(n)}} \xi_v^2, \quad \xi_v = \sum_{p=1}^n \alpha_{pv} x_p,$$

und zeigt, dass die Eigenwerte für $n \rightarrow \infty$ gegen die Eigenwerte des durch das Integral gegebenen Operators streben, dass i. a. abzählbar unendlich viele solche Eigenwerte existieren und dass eine Funktion g eine absolut und gleichmässig konvergente Eigenfunktionsentwicklung $g = \sum \beta_v \varphi_v$ besitzt; dabei wird nur verlangt, dass sich g in der Form $g(s) = \int k(s,t)h(t) dt$ mit stetigem h darstellen lässt.

Im Gegensatz zur 1. geht nun Hilbert in der 4. Mitteilung «abstrakt» vor: Er geht aus von einer quadratischen Form $Q(x)$ von unendlich vielen Variablen und deren «Abschnitten» $Q_n(x)$, d. h.,

$$Q(x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q, \quad Q_n(x) = \sum_{p,q=1}^n k_{pq} x_p x_q,$$

und verfolgt zuerst die Idee, Q solchen Bedingungen zu unterwerfen, dass die zugehörige Spektraltheorie dem endlichdimensionalen Fall noch möglichst analog bleibt. Dies führt ihn, in Verallgemeinerung des Falles der obigen Integralgleichungen mit stetigem Kern, auf die folgende

Definition. Q heisst *vollstetig* [kompakt sagen wir heute], wenn $\lim Q_n(x) = Q(x)$ gleichmässig für alle $x = (x_p)$ mit

$$(x, x) = \sum x_p^2 \leq 1$$

gilt. (Hilbert hat nie $x \in l^2$ oder $\|x\| \leq 1$ geschrieben.)

Dann hat Q kein Streckenspektrum; Hilbert schreibt (S. 148):

«**Satz 35.** Wenn eine ... Form Q vollstetig ist, so lässt sie sich stets durch eine orthogonale Substitution in die Gestalt bringen

$$Q(x) = k_1 \tilde{x}_1^2 + k_2 \tilde{x}_2^2 + \dots;$$

... k_1, k_2, \dots [sind] die reziproken Eigenwerte [Eigenwerte sagt man heute üblicherweise] von Q und besitzen, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, Null als einzige Verdichtungsstelle [d. h., als Häufungspunkt].»

Weiter reicht die algebraische Analogie (Hauptachsentransformation!) nicht. Hilbert geht aber noch einen grossen Schritt darüber hinaus, indem er «beschränkte Formen» einführt. Er nennt Q *beschränkt*, (s. S. 125), wenn es ein M so gibt, dass $|Q_n(x)| \leq M$ für alle n und $(x, x) \leq 1$ gilt. Er beweist, dass man dann (s. S. 145)

$$Q(x) = k_1 \tilde{x}_1^2 + k_2 \tilde{x}_2^2 + \dots + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; \xi)}{\mu} \quad (s = \text{Streckenspektrum})$$

erhält, und kennzeichnet die quadratische Form σ («Spektralform») genau.

Hilberts 4. Mitteilung ist dadurch bedeutsam, dass sie die früheste typisch funktionalanalytische Behandlung von Integralgleichungen darstellt und dass sie auf die Begriffe des stetigen und des kompakten linearen Operators führt, wie F. Riesz 1913 gezeigt hat; vgl. unten (§4). Typisch ist bei der 1. und bei der 4. Mitteilung der Einfluss *algebraischer Ideen*, die auch bei Toeplitz, E. Schmidt, v. Neumann, M. Stone und anderen wegweisend sind und ganz allgemein den Charakter der Funktionalanalysis fortwährend mitgeprägt haben. Hilbert hat diesen Wesenskern des sich entwickelnden Gebietes schon damals klar herausgeschält, indem er (im April 1908, publiziert 1909 in Rend. Palermo 27, 59–74) sagt:

«Das genannte Problem der Bestimmung unendlichvieler Unbekannter aus unendlichvielen Gleichungen erscheint auf den ersten Blick wegen seiner Allgemeinheit undankbar und unzugänglich; bei einer Beschäftigung damit droht die Gefahr, dass wir uns in zu schwierige oder vage und weitschichtige Betrachtungsweisen verlieren ohne entsprechenden Gewinn für tiefere Probleme. Aber wenn wir uns durch solche Erwägungen nicht beirren lassen, ... winkt uns [als Lohn] ... der schöne Preis einer *methodisch-einheitlichen Gestaltung von Algebra und Analysis*.»

4. Friedrich Riesz

Friedrich Riesz (1880–1956), der ältere Bruder von Marcel Riesz (1886–1969), nimmt in der Funktionalanalysis einen besonderen Platz ein durch die grosse Bedeutung seiner Ergebnisse, die Schönheit seiner Arbeiten – wohl kaum einer seiner Beweise ist jemals nachträglich wesentlich verbessert worden –, die lange Zeit seiner funktionalanalytischen Produktivität von 35 Jahren, 1907–41, sein Buch [11] nicht mitgerechnet, und insbesondere durch seine aktive Teilnahme an den Entwicklungen *beider* grossen damaligen Zentren der entstehenden Funktionalanalysis, Göttingen *und* Paris. Über die Hälfte seiner bedeutendsten Ergebnisse in der Funktionalanalysis hat Riesz erzielt, als er noch Oberschullehrer war, und zwar 1904–08 in Leutschau (dem Hauptort der Zips, damals 7000 Einwohner!) und 1908–12 in Budapest. Anschliessend wurde er dann Professor in Klausenburg und, als Klausenburg an Rumänien fiel, in Szeged (1920–46). Die letzten 10 Jahre lehrte er in Budapest.

Seine Arbeiten haben die erste Hälfte der Periode 1906–32 wesentlich mitgeprägt. 1907 beginnend, publiziert er 10 Jahre lang ein bedeutendes Ergebnis nach dem anderen:

1. *Riesz-Fischer Satz*. Der Hilbertsche Folgenraum l^2 , bestehend aus den Zahlenfolgen (x_j) mit $\sum x_j^2 < \infty$ als Punkten, und der Lebesguesche Raum $L^2[a, b]$, bestehend aus den (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen f mit $\int f(x)^2 dx < \infty$ als Punkten, sind isometrisch isomorph.

Dies war eine ganz unvorhersehbare Brücke zwischen Hilberts Theorie (s. §3) und Lebesgues Theorie (s. §6 der vorigen Arbeit) mit weitreichenden funktionalanalytischen Anwendungsmöglichkeiten für die letztere. Riesz schickte seinen Satz an Hilbert, der am 9. März 1907 darüber in Göttingen vortrug. Aber E. Fischer (1875–1959) hatte unabhängig praktisch denselben Satz entdeckt und 4 Tage eher, am 5. März, in seinem Seminar in Brünn darüber berichtet. Beide Arbeiten stehen in demselben Band der Comptes Rendus Paris (144, 615–19 bzw. 1022–24).

2. *Stetige lineare Funktionale auf $L^2[a, b]$* stellte Riesz 1907 (ibid., 1409–11) in der Form

$$U(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad g \in L^2[a, b],$$

dar und, nachdem der abstrakte Hilbertraum endlich (1927 durch J. v. Neumann) geboren war, im Jahre 1934–35 (Acta Szeged 7, 34–38) diese Funktionale auf einem solchen (nicht notwendig separablen) Raum durch das innere Produkt in der Form

$$U(f) = (f, g), \quad \|g\| = \|U\|,$$

mit eindeutigem g . Fréchet fand 1907 unabhängig (aber umständlicher) das erste dieser Ergebnisse.

3. *Stetige lineare Funktionale auf $C[a, b]$* stellte Riesz 1909 (C. R. Paris 149, 974–77) durch ein Riemann-Stieltjes-Integral

$$U(f) = \int_a^b f(x)d\alpha(x), \quad \text{Var } \alpha = \|U\|,$$

mit einer im wesentlichen eindeutig bestimmten Funktion α von beschränkter Schwankung dar.

Stieltjes hatte sein Integral schon 1894 veröffentlicht, aber wie man sieht, dauerte es 12 Jahre, bis es in Hilberts Spektraltheorie der beschränkten Formen (s. §3) im Jahre 1906 allgemeinere Bedeutung gewann, und 15 Jahre, bis es endlich durch Riesz fester Bestandteil der Integrationstheorie wurde. In der Tat regte Riesz durch seine berühmte Darstellung von 1909 andere Untersuchungen ähnlicher Natur an, als bedeutendste wohl die grosse Arbeit von J. Radon [Sitz.-Ber. Akad. Wien (IIa) 122, 1295–1438 (1913)].

4. *Die Räume l^p und L^p* führte Riesz in seiner Arbeit «Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen» (Math. Ann. 69, 449–97) im Jahre 1910 ein, mit dem Hinweis, dass sehr allgemeine Lösbarkeitskriterien überhaupt erst formuliert werden können, seitdem «der Begriff des Integrals durch Lebesgue jene geistreiche und glückliche Erweiterung erfahren hat, ...» (S. 450). In dieser Arbeit gibt Riesz auch für stetige lineare Funktionale A auf $L^p[a, b]$ mit $p > 1$ die Darstellung

$$A(f) = \int_a^b g(x)f(x)dx,$$

wobei $g \in L^q[a, b]$, $q = p/(p - 1)$ (also $1/p + 1/q = 1$) und bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt ist, und entwickelt die Dualitätstheorie dieser Räume.

5. *Hilberts Spektraltheorie* gibt Riesz im Jahre 1913 in seinem Buch «Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues» (Sammlung Borel; [10, S. 829–1016], insbes. Kap. IV, V) die uns geläufige Form für stetige und vollstetige (= kompakte) Operatoren (er sagt «Substitution» statt «Operator»), die ungleich bequemer ist als die der quadratischen Formen. Obwohl er (S. 833) behauptet: «... je n'ai contribué que bien peu à cette théorie», geht seine Darstellung doch wesentlich über Hilbert und seine Schule hinaus. Z. B. untersucht er Folgen stetiger Operatoren (S. 941–47), die Anwendung der Funktionentheorie (Residuenkalkül) auf die Resolvente (S. 951–54) und eine Spektraldarstellung für $f(A)$ mit selbstadjungiertem A und reellwertigem, stetigem $f(x)$ (S. 971); auch die Idee einer Banachalgebra von Operatoren klingt (S. 946) an.

6. *Die Riesz-Fredholm-Theorie kompakter Operatoren* druckt Acta Mathematica schon 1916 (S. 71–98 des Bandes), aber der ganze Band (41) erscheint wegen des Krieges erst 1918. Riesz definiert darin (S. 74) den kompakten linearen Operator (er sagt «vollstetige lineare Transformation») als einen linearen Operator, der jede beschränkte Folge in eine kompakte überführt. Hier tritt nun erstmals der Begriff der *Norm* auf, zwar nur für $C[a, b]$ (S. 72), aber Riesz nimmt auf $C[a, b]$ weiter keinen Bezug, sondern benutzt in seinen Überlegungen nur die Axiome der Norm, in der bis heute üblichen Form und Bezeichnung (S. 72)

$$\begin{aligned} \|f\| \geq 0, \quad \|f\| = 0 &\Leftrightarrow f = 0 \\ \|cf\| = |c| \|f\|, \quad \|f_1 + f_2\| &\leq \|f_1\| + \|f_2\|; \end{aligned}$$

$\|f_1 - f_2\| = \|f_2 - f_1\|$ nennt er die *Distanz* der Funktionen f_1 und f_2 . Riesz arbeitet also, 4 Jahre bevor Banach seine Dissertation einreicht, in einem Banachraum. Allerdings dürfte er dabei wohl nur an Banachräume von *Funktionen* gedacht haben; u. a. sagt er (S. 71): «Die ... Einschränkung auf stetige Funktionen ist nicht von Belang. Der in den neueren Untersuchungen über diverse Funktionalräume [Funktionsräume sagen wir heute] bewanderte Leser wird die allgemeinere Verwendbarkeit der Methode sofort erkennen; er wird auch bemerken, dass gewisse unter diesen, so die Gesamtheit der quadratisch integrierbaren Funktionen und der HILBERT'sche Raum von unendlich vielen Dimensionen noch Vereinfachungen gestatten, während der hier behandelte scheinbar einfachere Fall als Prüfstein für die allgemeine Verwendbarkeit [der Methode] betrachtet werden darf.»

Die von Riesz entwickelte Theorie kompakter Operatoren umfasst eine abstrakte Erweiterung der Hilbertschen Spektraltheorie vollstetiger quadratischer Formen sowie der berühmten Fredholmschen Sätze über die Existenz von Lösungen von Integralgleichungen auf Gleichungen für kompakte lineare Operatoren. Für letztere beweist Riesz insbesondere die sog. *Fredholmsche Alternative*, dass entweder $Tf = g$ für jedes g eindeutig lösbar ist und dann $Tf = 0$ nur die triviale Lösung $f = 0$ hat, oder dass $Tf = 0$ auch nicht identisch verschwindende Lösungen besitzt. Die Idee, die entsprechenden Gleichungen für den adjungierten Operator heranzuziehen, um *alle* Fredholmschen Ergebnisse verallgemeinern zu können, stammt von J. Schauder [Studia Math. 2, 185–96 (1930)] und

wurde erst möglich durch Hahns Entdeckung des Hahn-Banach-Satzes im Jahre 1927, den Schauder den «Erweiterungssatz des Herrn Hahn» nennt. Die so ergänzte Theorie wird gewöhnlich als *Riesz-Schauder-Theorie* bezeichnet.

5. Normierte und Banachräume

Die beiden wichtigsten Ereignisse der zweiten Hälfte der Periode 1906-32 sind erstens die Entwicklungen der Hilberträume samt der Spektraltheorie ihrer unbeschränkten Operatoren (§6) und zweitens der normierten Räume, insbesondere der Banachräume (der vollständigen normierten Räume).

Um 1920 herum lag der Normbegriff «in der Luft»: Riesz (1916) haben wir eben erwähnt; Eduard Helly (1884–1943) führt 1921 eine Norm auf abstrakten Folgenräumen ein (Monatsh. Math. Phys. 31, 60–91), die er «Abstandsfunktion» nennt, mit D bezeichnet und durch dieselben Axiome wie Riesz definiert. Hans Hahn (1879–1934) überträgt dies 1922 auf allgemeine normierte Räume (ibid., 32, 3–88). Im gleichen Jahr erscheint die Dissertation von Stefan Banach (1892–1945) in Fund. Math. 3, 133–81, mit denselben Axiomen und der Bezeichnung für die Norm wie Riesz (den Banach nicht erwähnt). 1922 publiziert auch Norbert Wiener (1894–1964) ähnliche Axiome für die Norm (Coll. Works I, 307), wendet sich aber dann anderen Dingen zu.

Es vergehen nun kaum 10 Jahre, bis die Grundlagen der gesamten Theorie sowie vieles über Frécheträume (im Sinne von Banach; vgl. Anm. [1*] der vorigen Arbeit) voll entwickelt vorliegt:

1922 beweist Hahn den Satz von der gleichmässigen Beschränktheit mit Lebesgues Methode des «gleitenden Buckels»; 1929 liefern Banach und Steinhaus, der bei Hilbert promoviert hat, unter Anregung von S. Saks einen Beweis dieses Satzes mittels des Baireschen Kategoriensatzes (1899), der damit seinen festen Platz in der Funktionalanalysis findet.

Für Banachräume beweist Banach 1929 den Satz vom beschränkten Inversen und Schauder 1930 den Satz von der Gebietsinvarianz. Für Frécheträume erhält Banach 1932 (in seinem Buch) diese beiden Sätze und auch den Graphensatz.

Diese vier grossen Sätze machen Gebrauch von der Vollständigkeit, im Gegensatz zu dem fünften, dem Hahn-Banach-Satz, den Hahn 1927 für normierte Räume und Banach 1929 allgemeiner für Vektorräume (ohne Bezug auf eine Norm) beweist. Damit weiss man nun insbesondere, dass man für normierte Räume eine reichhaltige Dualitätstheorie verfügbar hat.

Als äusseres Zeichen des Abschlusses dieser rasanten Entwicklung erscheint 1932 Banachs berühmtes Buch [1] in Französisch (als Nachfolger einer polnischen Ausgabe von 1931), das weltweites Interesse findet, eine Gesamtdarstellung der neuen Theorie, ergänzt durch eine Liste offener Probleme, die einen wesentlichen Bestandteil des Buches ausmacht und, worauf mich Herr G. Köthe freundlicherweise hinwies, grossenteils von S. Mazur stammt.

6. Hilberträume. Einfluss der Quantenmechanik

Die Entwicklung der Theorie der Hilberträume ist eigenartig und ganz anders als die der Banachräume verlaufen. Bei Hilbert selbst, der weder das Wort «Raum» noch die

Bezeichnung l^2 in diesem Zusammenhange je benutzt hat, findet man der Sache nach den Raum l^2 . Nach der Entdeckung des Riesz-Fischer-Satzes (1907; s. §4) erkennt man allmählich, dass das Lebesgue-Integral den besten Rahmen für Hilberts Integralgleichungstheorie liefert; siehe z. B. E. Hellinger und O. Toeplitz [5]. 1908 schlägt Erhard Schmidt (1876–1959), angeregt durch G. Kowalewski, die «geometrische Sprechweise» der Hilbertraumtheorie vor, wie wir sie heute benutzen [12].

Dann folgt eine verhältnismässig ruhige Periode mit Untersuchungen, die die spätere Theorie der unbeschränkten Operatoren vorausahnen lassen: 1910 erscheint die Habilitationsschrift [15] von Hermann Weyl (1885–1955), wohl Hilberts bedeutendstem Schüler, über singuläre Sturm-Liouville-Probleme. 1910 wird auch der Hellinger-Toeplitz-Satz (s. [7, S. 525]) publiziert und 1923 die Dissertation Torsten Carlemans (1892–1948) über singuläre Integralgleichungen (Mat. Naturvetenskap. 3).

Da entwickelt sich mit einem Male von 1925 an die Quantenmechanik (1925 Heisenberg, 1926 Schrödinger, Dirac usw.).

Es ist nun vor allem Hilberts damaliger Assistent Johann von Neumann (1903–57) aus Budapest, der, von Hilbert aufmerksam gemacht, erkennt, dass man diese neue Theorie mathematisch einwandfrei im Rahmen des Hilbertraums begründen kann. Hierzu lässt man die Zustände eines physikalischen Systems den Elementen dieses Raums (genauer den eindimensionalen Unterräumen) und die Observablen (beobachtbaren Grössen, wie Ort und Impuls) geeigneten selbstadjungierten Operatoren in diesem Raum entsprechen. Als ersten Schritt in diesem Programm definiert v. Neumann 1927 den abstrakten (separablen) Hilbertraum (Gött. Nachr., 1–57; Coll. Works I, 151–207, bes. 165–67). Nun braucht man aber selbst für die einfachsten physikalischen Systeme (z. B. ein Elektron auf einer Geraden) *unbeschränkte* Operatoren, deren Theorie, insbesondere deren Spektraltheorie, damals erst noch zu schaffen war, beginnend mit zweckmässigen Definitionen, z. B. von «Selbstadjungiertheit». Dies vollbringt v. Neumann (mit etwas Nachhilfe von Erhard Schmidt) für symmetrische, selbstadjungierte und normale Operatoren in kurzer Zeit in zwei grossen Arbeiten, die 1929 erscheinen (Math. Ann. 102, 49–131, 370–427). Ein wesentlicher, durch die Algebra (und die Funktionentheorie) motivierter Kunstgriff ist dabei die Zurückführung des unbeschränkten Falles auf den beschränkten Fall vermöge der «Cayleytransformation» (S. 80)

$$T \mapsto U = (T + iI)(T - iI)^{-1}.$$

Keine dieser beiden Arbeiten enthält irgendeinen Hinweis auf die Physik, obwohl sie ja durch diese angeregt wurden. Gleichzeitig arbeitet v. Neumann aber auch an verwandten physikalischen Fragen, zum Teil gemeinsam mit E. Wigner. Als Synthese erscheint 1932 sein Buch [9] über die Grundlagen der Quantenmechanik.

Fast gleichzeitig hat M. H. Stone (geb. 1903) unabhängig über Hilberträume und unbeschränkte Operatoren zu arbeiten begonnen und 1932 als Frucht sein bekanntes Buch [13] über lineare Operatoren im Hilbertraum erscheinen lassen, zu dessen Entstehung er uns seinerzeit einige interessante Mitteilungen (s. [3, S. 309]) gemacht hat. Diese erste zusammenfassende Darstellung über (separable) Hilberträume wurde durch ihren klaren Aufbau und die Berücksichtigung von Anwendungen auf Integraloperatoren und gewöhnliche Differentialgleichungen bald zu einem Standardwerk für die nachfolgenden Jahre.

7. Schlussbemerkung

Das Erscheinen der Bücher von Banach, Stone und v. Neumann im Jahre 1932 macht es augenfällig, dass zu jener Zeit die Grundlagen der Banachraumtheorie (vgl. § 5) vollendet sind und dass die Hilberträume ihren Platz in der Funktionalanalysis gefunden und ihre Anwendbarkeit in der «modernen» Physik erwiesen haben. Dies dokumentiert, dass die Funktionalanalysis damit zu einem selbständigen Gebiet herangereift ist.

Auf Prozesse, die vor 1932 begonnen, aber erst später zu wesentlichen Höhepunkten geführt haben, konnte aus Platzgründen nicht eingegangen werden. Hierzu gehören z. B. die Arbeiten von G. D. Birkhoff und J. v. Neumann, die die moderne Ergodentheorie begründeten, Arbeiten zur Fixpunkttheorie, Schauders Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen seit 1927 (vgl. [3, § 16, 20]), Köthes und Toeplitzs Arbeiten, die für die Theorie der lokalkonvexen Räume richtungweisend wurden, Bochners und Wierners Arbeiten, die die Distributionstheorie vorbereiten halfen, Arbeiten zur Approximationstheorie und anderes mehr.

Mit diesen wenigen kurzen Bemerkungen wollen wir auch darauf hinweisen, dass auf die 1932 zu Ende gehende Entwicklungsphase zur Vereinheitlichung unmittelbar eine Phase anderen, fast «explosionsartigen» Charakters folgt, mit vielen neuen Begriffen (Banachalgebren, lokalkonvexen Räumen, Distributionen usw.) und neuen Anwendungen (z. B. partielle Differentialgleichungen, abstrakte harmonische Analyse, Halbgruppen, Numerik usw.). Der 1932 erreichte Abschluss wird also damit zur Grundlage und zum Ausgangspunkt einer sofort einsetzenden Weiterentwicklung der Funktionalanalysis mit verschiedenartigen Zielen, die bis zur Gegenwart anhält.

Erwin Kreyszig, Carleton University, Ottawa, Kanada

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 S. Banach: *Théorie des opérations linéaires* (Warschau 1932; Nachdruck Chelsea, New York).
- 2 G. Birkhoff: *A Source Book in Classical Analysis* (Harvard University Press, Cambridge, MA, 1973).
- 3 G. Birkhoff und E. Kreyszig: The establishment of functional analysis, *Historia Math.* 11, 258–321 (1984).
- 4 F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* (Veit, Leipzig 1914; Nachdruck Chelsea, New York 1965).
- 5 E. Hellinger und O. Toeplitz: *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten* (1927), in: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften II 3*, S. 1335–1597 (Teubner, Leipzig 1923–27; Nachdruck Chelsea, New York 1953).
- 6 D. Hilbert: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Teubner, Leipzig 1912; Nachdruck Chelsea, New York 1953).
- 7 E. Kreyszig: *Introductory Functional Analysis With Applications* (Wiley, New York 1978).
- 8 E. Kreyszig: Zur Entwicklung der zentralen Ideen in der Funktionalanalysis, *Elemente der Math.* Vol. 41, 1986, p. 25–35.
- 9 J. v. Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, Berlin 1932).
- 10 F. Riesz: *Gesammelte Arbeiten*, 2 Bde. (Akadémiai kiadó, Budapest 1960).
- 11 F. Riesz und B. Szökefalvi-Nagy: *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Akadémiai kiadó, Budapest 1952).
- 12 E. Schmidt: Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 25, 53–77 (1908).
- 13 M. H. Stone: *Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1932).
- 14 A. E. Taylor: A study of Maurice Fréchet, I, *Archive Hist. Exact Sciences* 27, 233–95 (1982).
- 15 H. Weyl: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.* 68, 220–69 (1910).