Aufgaben

Aufgabe 926. Man berechne die Nullstellen der Polynome P_n mit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{n-k} x^k; \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Hj. Stocker, Wädenswil

Lösung: Man prüft leicht nach, dass die vorgegebene Polynomfolge $(P_n(x))$ der Rekursion

$$P_{n+1}(x) = (2-x)P_n(x) - P_{n-1}(x) \quad \text{für} \quad n \geq 1 \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 - x$ genügt.
Sind U_m in der Bezeichnungsweise von [1] die Tchebychef-Polynome zweiter Art, so gilt $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ und

$$U_{m+1}(x) = 2xU_m(x) - U_{m-1}(x) \quad \text{für} \quad m \geq 1$$

nach [1], S. 782. Hieraus sieht man leicht $U_2(x) = 4x^2 - 1$ und

$$U_{2(n+1)}(x) = (4x^2 - 2)\, U_{2n}(x) - U_{2(n-1)}(x) \quad \text{für} \quad n \geq 1 \tag{2}$$

und kann für $n = 0, 1, \ldots$

$$P_n(x) = (-1)^n U_{2n}\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) \tag{3}$$

behaupten. Für $n = 0$ bzw. $n = 1$ prüft man (3) direkt nach, und für $n \geq 2$ folgt (3) induktiv mittels (1) und (2). Nach [1], S. 787, hat $U_{2n}(y)$ für $n \geq 1$ genau die $2n$ verschiedenen Nullstellen $\cos\frac{\nu\pi}{2n+1}$, $\nu = 1, \ldots, 2n$, und so hat $P_n(x)$ bei $n \geq 1$ genau die n verschiedenen Nullstellen $\left(2\cos\frac{\nu\pi}{2n+1}\right)^2$, $\nu = 1, \ldots, n$.

P. Bundschuh, Köln, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Abramowitz und I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ. Inc., New York 1970.

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), K. Dilcher (Halifax, CD), F. Götze (Jena, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Ittigen), K. Warneke (Vechta, BRD), M. Vowe (Therwil, 3 Lösungen), R. Wyss (Flumenthal), K. Zacharias (Berlin, BRD).

Aufgabe 927. Zwei in einer Ebene liegende kongruente Kreise $k\,(M,r)$ und $k'\,(M',r)$ mit $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ seien gegeben. P sei ein variabler Punkt auf k, Q das Bild von P bei der Spiegelung an der Tangente von k' im Punkt P' mit $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$. Man ermittle den geometrischen Ort von Q.

L. Kuipers, Sierre

Lösung: Wir wählen Polarkoordinaten (ρ, φ) mit Pol in M, Polarachse $\overrightarrow{MM'}$ und setzen $|\vec{a}| = a$. Berücksichtigen wir zudem die übliche Konvention, dass in einer Kurvendarstellung $\rho = f(\varphi)$ einem negativen Wert ρ der Punkt $(-\rho, \pi + \varphi)$ entsprechen soll, so lautet die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes

$$C: \rho = f(\varphi) = r + 2a\cos\varphi .$$

C ist also eine Konchoide des durch M gehenden Kreises mit Zentrum M', und zwar in bezug auf den Kreispunkt M.

J. Binz, Bolligen

Weitere Lösungen sandten K. Bickel (Nürtingen, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Guggenheimer (Farmingdale, NY, USA), W. Janous (Innsbruck, A), V.D. Mascioni (Origlio), Hj. Stocker (Wädenswil, 4 Lösungen), K. Warneke (Vechta, BRD), R. Wyss (Flumenthal), K. Zacharias (Berlin, BRD).

Aufgabe 928. Es seien $k > 3$ und n natürliche Zahlen. Jedes konvexe $[(k-2)n+2]$-Eck lässt sich durch $n-1$ seiner Diagonalen in n k-Ecke zerlegen. Man berechne die Anzahl $a_{n,k}$ der möglichen Zerlegungen.

J. Binz, Bolligen

Lösung. Im konvexen $[(k-2)n+2]$-Eck P zeichnen wir eine Seite s aus. Jede Unterteilung von P in n k-Ecke enthält genau ein k-Eck Q mit der Seite s. Wir berechnen die Anzahl der Unterteilungen für ein festes Q und summieren dann über alle möglichen Positionen von Q. Mit der Abkürzung $a_{n,k} = a_n$ für festes k ergibt sich so die Rekursionsformel

$$a_n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{k-1} \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_{k-1} = n-1}} a_{n_1} \cdot a_{n_2} \dots a_{n_{k-1}}; \qquad n \in \mathbf{N}, \qquad a_0 := 1 .$$

Für die erzeugende Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

gilt

$$x\,(f(x))^{k-1} = f(x) - 1 .$$

Die Umkehrfunktion g von $f-1$ lautet also

$$g(x) = \frac{x}{(1+x)^{k-1}},$$

und die Inversionsformel von Lagrange, angewandt auf g und $f-1$, ergibt wegen

$$(g(x)/x)^{-n} = (1+x)^{n(k-1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n(k-1)}{j} x^j$$

die gesuchte Anzahlformel

$$a_{n,k} = a_n = \frac{1}{n} \binom{n(k-1)}{n-1}; \qquad n, k \in \mathbf{N}, \qquad k > 3.$$

Chr. A. Meyer, Ittigen

Bemerkung der Redaktion: Verschiedene Leser weisen darauf hin, dass die Aufgabe nicht neu ist. S.C. Locke (Boca Raton, USA) zitiert Exercise 2.7.14. in: I.P. Goulden und D.M. Jackson: Combinatorial Enumeration, S. 127, Wiley and Sons, 1983.
Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), K. Warneke (Vechta, BRD). Eine Lösung war falsch.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1987* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175).

Aufgabe 944. Für $p > 1$ bestimme man

$$\sup\left\{ -\int_0^1 f(x) \log x \, dx \,\middle|\, \int_0^1 \left(x^{-1} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \leqslant 1 \right\}.$$

A. A. Jagers, Enschede, NL

Aufgabe 945. Man bestimme den geometrischen Ort der Spitzen aller quadratischen Kegel, welche durch 6 bzw. durch 7 gegebene Punkte hindurchgehen.

B. L. v. d. Waerden, Zürich

Aufgabe 946. Die Summe

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^k (n+k+1)}$$

ist geschlossen auszuwerten.

M. Vowe, Therwil