

# Über einen Satz von F. Karteszi

Autor(en): **Zeitler, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 1

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40028>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

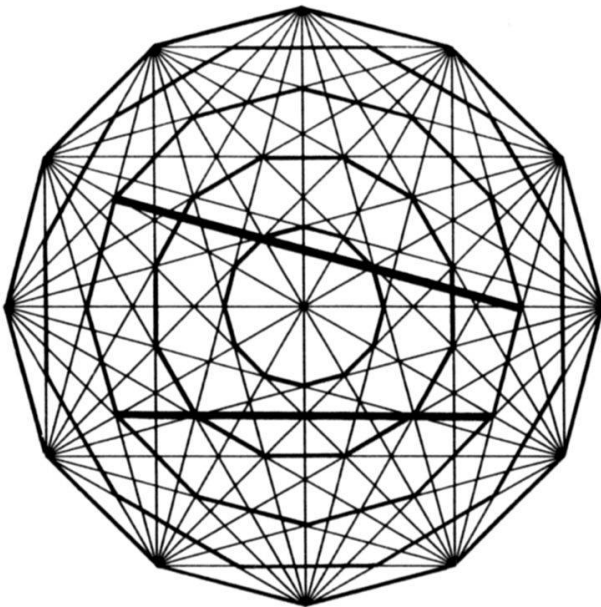
## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

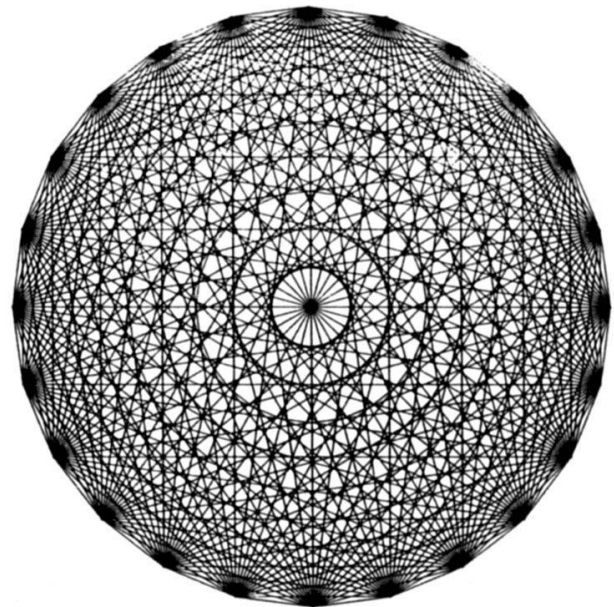
# Über einen Satz von F. Karteszi

## Einleitung

Eine beliebte Übungsaufgabe in der Schule ist es, Schülern alle  $\binom{e}{2}$  Sehnen eines regulären  $e$ -Ecks zeichnen zu lassen. Aus dem Gewirr von Strecken kristallisieren sich dabei – vor allem bei zunehmender Eckenzahl – im Innern des Polygons weitere, kleinere reguläre  $e$ -Ecke heraus. Das so auf spielerische Weise entstehende «Tischdeckchenmuster» entbehrt nicht eines gewissen ästhetischen Reizes. Mit solchen regulären  $e$ -Ecken, innerhalb eines gegebenen Startpolygons, wollen wir uns hier beschäftigen. Die Figuren 1 und 2 zeigen die Situation für  $e = 12$  und  $e = 24$ .



Figur 1.



Figur 2.

## 1. Reguläre Polygone $\Pi_i$

### 1.1. Das Startpolygon $\Pi_1$

Wir starten mit einem regulären  $e$ -Eck  $\Pi_1$ , wobei  $e \in \mathbb{N}$ ,  $e > 4$ . Der Mittelpunkt des Umkreises von  $\Pi_1$  sei  $M$ , sein Radius  $r$ . Die Seiten  $(s_1)_1$  dieses Polygons nennen wir 1-Sehnen von  $\Pi_1$ . Für den zu  $(s_1)_1$  gehörenden Mittelpunktswinkel  $2\varphi$  gilt  $2\varphi = \frac{2\pi}{e}$  und für den Abstand  $(\rho_1)_1$  einer solchen Sehne von  $M$  weiter  $(\rho_1)_1 = r \cos \varphi$ .

### 1.2. $i$ -Sehnen in $\Pi_1$

Wir sprechen von  $i$ -Sehnen  $(s_i)_1$  in  $\Pi_1$ , wenn für den zugehörigen Mittelpunktswinkel gilt  $i \cdot 2\varphi = \frac{2\pi i}{e}$  mit  $1 \leq i < \frac{1}{2}e$ .

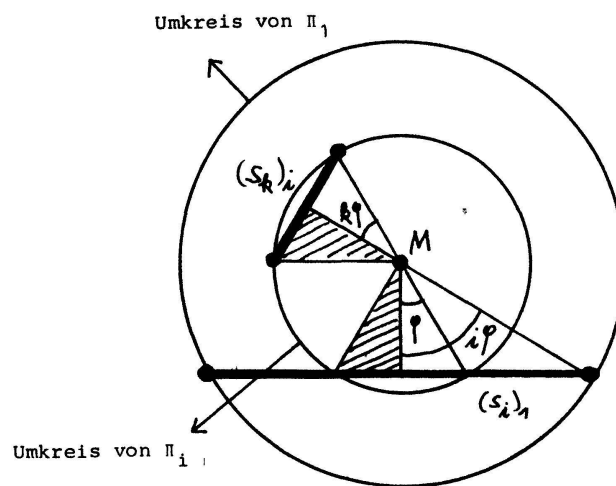
### 1.3. Das Polygon $\Pi_i$

Teile der  $i$ -Sehnen  $(s_i)_1$  in  $\Pi_1$  erzeugen ein reguläres  $e$ -Eck, das wir mit  $\Pi_i$  bezeichnen. Für den Abstand  $(q_i)_1$  einer Sehne  $(s_i)_1$  von  $M$  gilt

$$(q_i)_1 = r \cos i \cdot \varphi.$$

Der Radius  $r_i$  des Umkreises von  $\Pi_i$  läßt sich der Figur 3 entnehmen. Wir erhalten

$$r_i = \frac{(q_i)_1}{\cos \varphi} = r \frac{\cos i \cdot \varphi}{\cos \varphi}.$$



Figur 3.

Wegen  $1 \leq i < \frac{1}{2}e$  gibt es, falls  $e$  ungerade, innerhalb von  $\Pi_1$  insgesamt  $[\frac{1}{2}e - 1]$  solcher regulärer  $e$ -Ecke  $\Pi_i$ , sonst  $\frac{1}{2}e - 2$ .

## 2. Der Satz von Karteszi

Prof. F. Karteszi, Budapest, teilte mir einen Satz über reguläre Polygone mit und forderte mich auf, einen elementargeometrischen Beweis dieses Satzes zu führen.

### 2.1. Der Satz

Jede  $k$ -Sehne in  $\Pi_i$  ist auch  $i$ -Sehne in  $\Pi_k$ .

Dabei gilt natürlich  $i \neq k$ . Die kleinere Sehne muß jeweils entsprechend verlängert werden.

In Figur 1 sind in  $\Pi_3$  eine 5-Sehne und eine 4-Sehne eingezeichnet. Man erkennt, dass im ersten Fall eine 3-Sehne in  $\Pi_5$ , im zweiten eine 3-Sehne in  $\Pi_4$  vorliegt.

### 2.2. Berechnung von Streckenlängen

#### 2.2.1. $k$ -Sehnen in $\Pi_i$

Jetzt betrachten wir  $k$ -Sehnen  $(s_k)_i$  in  $\Pi_i$ . Der zugehörige Mittelpunktswinkel beträgt  $k \cdot 2\varphi$ . Für den Abstand  $(q_k)_i$  dieser Sehnen  $(s_k)_i$  erhalten wir mit Figur 3 sofort

$$(q_k)_i = r_i \cdot \cos k \cdot \varphi,$$

also weiter  $(Q_k)_i = \frac{r}{\cos \varphi} \cos k \cdot \varphi \cos i \cdot \varphi$ .

2.2.2.  $i$ -Sehnen in  $\Pi_k$

Ganz analog wie in 2.2.1 erhalten wir für den Abstand  $(Q_i)_k$  der  $i$ -Sehne  $(s_i)_k$  in  $\Pi_k$  von  $M$

$$(Q_i)_k = \frac{r}{\cos \varphi} \cos i \cdot \varphi \cos k \cdot \varphi .$$

Aus 2.2.1 und 2.2.2 folgt

2.2.3. Hilfssatz

*Die  $k$ -Sehnen in  $\Pi_i$  und die  $i$ -Sehnen in  $\Pi_k$  haben von  $M$  den gleichen Abstand.*

2.3. Drehung der Polygone

Polygone  $\Pi_i$  und  $\Pi_k$ , bei denen  $i$  und  $k$  verschiedene Parität haben, sind gegeneinander um den Winkel  $\varphi \pmod{2\varphi}$ , bei gleicher Parität um den Winkel  $0 \pmod{2\varphi}$  gedreht. Dabei ist  $M$  der Drehpunkt. Dies liegt daran, daß beim Übergang von einem Polygon zum nächstfolgenden stets eine Drehung um den Winkel  $\varphi$  erfolgt.

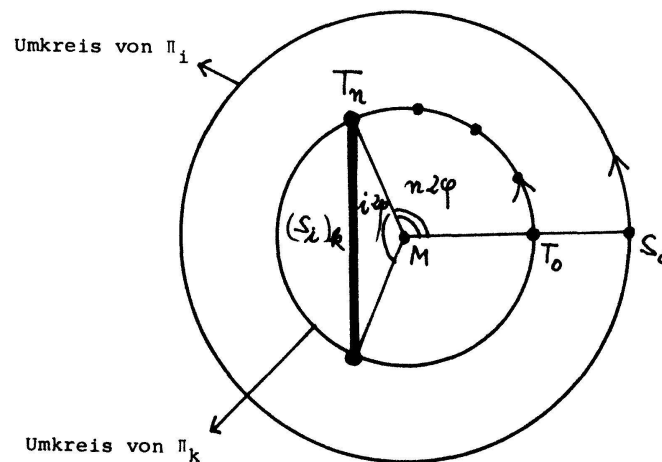
2.4. Berechnung von Winkelgrößen

O.B.d.A. sei  $i < k$ . Weiter sei  $S_0$  ein Eckpunkt des Polygons  $\Pi_i$  und  $(s_k)_i$  die von  $S_0$  aus gegen den Uhrzeigersinn angetragene  $k$ -Sehne in  $\Pi_i$ .

Alle Winkel werden künftig von der Halbgeraden  $MS_0$  in mathematisch positivem Sinn (gegen Uhrzeiger) gemessen.

Die Mittelsenkrechte zur genannten Sehne schliesst mit  $MS_0$  den Winkel  $k \cdot \varphi$  ein.

Für das Weitere unterscheiden wir zwei Fälle.



Figur 4.

### 2.4.1. $i, k$ haben gleiche Parität

Nach 2.3 sind die Polygone  $\Pi_i$  und  $\Pi_k$  – bis auf Vielfache von  $2\varphi$  – gegeneinander nicht verdreht. Die Halbgerade  $MS_0$  schneidet dann  $\Pi_k$  in einem Eckpunkt  $T_0$  (Figur 4).

Jetzt suchen wir nach einer Sehne  $(s_i)_k$ , die zu der Sehne  $(s_k)_i$  durch den Punkt  $S_0$  parallel läuft, also dann wegen des Hilfssatzes 2.2.3 mit ihr zusammenfällt. Existiert sie? Wenn ja, wäre der Satz von Karteszi bewiesen.

Die gesuchte Sehne gehe durch einen Eckpunkt  $T_n$  des Polygons  $\Pi_k$  mit  $\sphericalangle(S_0MT_n) = n \cdot 2\varphi$  und  $n > 0$ . Sie sei so gelegen, dass ihre Mittelsenkrechte mit  $MS_0$  den Winkel  $n \cdot 2\varphi + i \cdot \varphi$  einschliesst. Im Falle  $n \cdot 2\varphi + i \cdot \varphi = k \cdot \varphi$ , also für  $n = \frac{1}{2}(k - i)$ , sind die beiden Sehnen parallel. Weil  $i$  und  $k$  gleiche Parität haben, ist  $k - i$  durch 2 teilbar. Es gibt also eine geeignete Zahl  $n \in \mathbb{N}$ .

### 2.4.2. $i, k$ haben verschiedene Parität

Nach 2.3 sind die Polygone  $\Pi_i$  und  $\Pi_k$  – bis auf Vielfache von  $2\varphi$  – um den Winkel  $\varphi$  gegeneinander verdreht. Der Startpunkt  $T_0$  auf  $\Pi_k$  liege jetzt so, dass die Halbgeraden  $MT_0$  und  $MS_0$  den Winkel  $\varphi$  einschliessen.

Wie in 2.4.1 suchen wir eine Sehne  $(s_i)_k$ , die zu der Sehne  $(s_k)_i$  durch den Punkt  $S_0$  parallel läuft.

Die gesuchte Sehne gehe durch einen Eckpunkt  $T_n$  des Polygons  $\Pi_k$  mit  $\sphericalangle(S_0MT_n) = n \cdot 2\varphi + \varphi$  und  $n \geq 0$ . Sie sei so gelegen, dass ihre Mittelsenkrechte mit  $MS_0$  den Winkel  $n \cdot 2\varphi + \varphi + i \cdot \varphi$  einschliesst. Im Falle  $n \cdot 2\varphi + \varphi + i \cdot \varphi = k \cdot \varphi$ , also für  $n = \frac{1}{2}(k - i - 1)$ , sind die beiden Sehnen parallel. Weil  $k$  und  $i$  verschiedene Parität haben, ist  $k - i - 1$  durch 2 teilbar. Es gibt also eine geeignete Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ .

## Schluß

Es ist erstaunlich, dass es in der klassischen Elementargeometrie immer wieder neue Problemchen gibt, deren Lösung einfach Freude macht. Von einer Verkalkung dieser Disziplin, oder gar von ihrem Tod kann nicht gesprochen werden.

In Anlehnung an eine Äusserung von R. Thom stellen wir fest, dass der Versuch, die Elementargeometrie aus der Mathematik, vor allem aber aus der Schule zu eliminieren, ein gewaltiger pädagogischer Irrtum ist.

H. Zeitler, Math. Institut, Universität Bayreuth