Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1987)
Heft: 2

Artikel: Perfekte Dreiecke
Autor: Binz, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40032

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$c(x)$ und $d(x)$ sind in diesem Intervall beide fallend und wegen $|d'(x)| < 0.1 < 0.4 < |c'(x)|$ für $x \in (2.53, 2.55)$, wie man leicht sieht, ist ein solches x_2 eindeutig bestimmt.

(vii) $c(2.6) < c(2.55) < d(2.6) \Rightarrow c(x) < d(x)$ für $2.55 \leq x \leq 2.6.$

(viii) $c(2.64) < c(2.6) < d(2.64) \Rightarrow c(x) < d(x)$ für $2.6 \leq x \leq 2.64.$

(ix) $c(2.64) < 1/\pi \Rightarrow c(x) < d(x)$ für $2.64 \leq x < \pi.$

Lemma 6 ist somit bewiesen.

Beweis von Lemma 3: Um zu beweisen, dass

$$e(x) := \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{8(\pi-x)^3 - x^3}{[8(\pi-x)^2 + x^2]^{3/2}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{5+4\cos x} =: f(x)$$

genau drei Lösungen in $(0, \pi)$ hat, genügt es zu zeigen, dass $e'(x) = f'(x)$ genau zwei Lösungen in $(0, \pi)$ hat. Da aber $e'(x) = f'(x)$ zur Gleichung $c(x) = d(x)$ von Lemma 6 äquivalent ist, ist Lemma 3 bewiesen.

Nach Abfassung dieser Note wurde ich darauf aufmerksam gemacht, dass Stroeker und Hoogland meine Ungleichungen (1) und (2) in [2] vermutet haben. Sie haben insbesondere auch versucht, die Vermutung numerisch glaubwürdig zu machen.

V. Mascioni, Math.-Departement ETH-Zürich

LITERATUR

1 V. Mascioni: *Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels,* El. Math. 41, 98–101 (1986).

2 R. J. Stroeker, H. J. T. Hoogland: *Brocardian geometry revisited, or some remarkable inequalities,* Nieuw Arch. voor Wisk. (4) 2, 281–310 (1984).

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/87/020042-04$1.50+0.20/0

Didaktik und Elementarmathematik

Perfekte Dreiecke

Wir nennen ein Dreieck *perfekt,* wenn seine Seitenlängen a, b, c, sein Flächeninhalt A, sein Inkreisradius ϱ und seine Ankreisradien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c ganzzahlig sind und wenn a, b, c, ϱ, ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c teilerfremd sind. Beispiele sind am Schluss dieser Studie aufgeführt. Wir geben im folgenden alle rechtwinkligen und alle gleichschenkligen perfekten Dreiecke an. Dann zeigen wir, dass es zu jedem ϱ nur endlich viele perfekte Dreiecke gibt, wovon für $\varrho \geq 2$ je mindestens eines weder rechtwinklig noch gleichschenklig ist. Als nächstes beschreiben wir ein Verfahren, mit dem man zu gegebenem ϱ alle perfekten Dreiecke finden kann. Schliesslich geben wir alle perfekten Dreiecke mit $1 \leq \varrho \leq 5$ an.

Wir verwenden stillschweigend die Formeln $A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$, $\varrho = \frac{A}{s}$, $\varrho_a = \frac{A}{s-a}$, $\varrho_b = \frac{A}{s-b}$, $\varrho_c = \frac{A}{s-c}$. Mit A ist auch s ganzzahlig.

Satz 1. Ein pythagoräisches Dreieck ist genau dann perfekt, wenn es primitiv ist.

Beweis: Durch $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$ mit $(u, v) = 1$, $u - v$ positiv ungerade, sind alle primitiven pythagoräischen Dreiecke gegeben. Man bestätigt unmittelbar $A = uv(u+v)(u-v)$, $\varrho = v(u-v)$, $\varrho_a = u(u-v)$, $\varrho_b = v(u+v)$ und $\varrho_c = u(u+v)$. Die übrigen pyth. Dreiecke erhält man durch Streckung mit $k \geq 2$ aus den primitiven; sie können deshalb nicht perfekt sein.

Bemerkung: Zu jedem $\varrho \in N$ gibt es mindestens ein perfektes rechtwinkliges Dreieck, wie die Wahl $v = \varrho$, $u = \varrho + 1$ zeigt.
Für jedes ungerade $\varrho \geq 3$ gibt es mindestens ein weiteres rechtwinkliges perfektes Dreieck, nämlich für $v = 1$, $u = \varrho + 1$.

Satz 2. Alle gleichschenkligen perfekten Dreiecke sind durch die folgenden beiden Scharen gegeben:

(1) $a = b = u^4 - v^4$, $\quad c = 4uv(u^2 - v^2)$,
(2) $a = b = uv(u^2 + v^2)$, $\quad c = 2uv(u^2 - v^2)$,

wo die Parameter den Bedingungen $(u, v) = 1$, $u - v$ positiv ungerade genügen.

Beweis: Wegen $a = b$ ist die Basis c gerade, $c = 2d$. Für die Höhe h_c gilt $h_c = \frac{A}{d} = \frac{A}{s-a} = \varrho_a$; (d, ϱ_a, a) muss ein pythagoräisches Tripel sein.

1. Fall: $d = 2kuv$, $\varrho_a = k(u^2 - v^2)$, $a = k(u^2 + v^2)$, $(u, v) = 1$, $u - v$ positiv ungerade. Damit erhalten wir $\varrho = \frac{2kuv(u-v)}{u+v}$ und $\varrho_c = \frac{2kuv(u+v)}{u-v}$. Weil $u+v$ zu 2, u, v und $u-v$ teilerfremd ist, muss $k = (u+v)(u-v)$ sein. Damit ist die Ganzzahligkeit der Daten $a = b = (u^2 - v^2)(u^2 + v^2)$, $c = 4uv(u^2 - v^2)$, $A = 2uv(u^2 - v^2)^3$, $\varrho = 2uv(u-v)^2$, $\varrho_c = 2uv(u+v)^2$ und $\varrho_a = \varrho_b = (u^2 - v^2)^2$ gesichert. Ein gemeinsamer Teiler t von a, c, ϱ, ϱ_a, ϱ_c ist ungerade, weil ϱ_a ungerade ist. Aus $t \mid (\varrho_c - \varrho + 4\varrho_a + 4a)$, $t \mid (\varrho_c - \varrho + 4\varrho_a - 4a)$ folgt $t \mid 8u^4$, $t \mid 8v^4$ und deshalb $t = 1$. Somit sind die Dreiecke perfekt.

2. Fall: $d = k(u^2 - v^2)$, $\varrho_a = 2kuv$, $a = k(u^2 + v^2)$, $(u, v) = 1$, $u - v$ positiv ungerade. Damit werden $\varrho = \frac{kv(u^2 - v^2)}{u}$ und $\varrho_c = \frac{ku(u^2 - v^2)}{v}$. Diesmal muss $k = uv$ sein, was die ganzzahligen Daten $a = b = uv(u^2 + v^2)$, $c = 2uv(u^2 - v^2)$, $A = 2u^3v^3(u^2 - v^2)$, $\varrho = v^2(u^2 - v^2)$, $\varrho_c = u^2(u^2 - v^2)$ und $\varrho_a = \varrho_b = 2u^2v^2$ ergibt. Ein gemeinsamer Teiler t von a, c, ϱ, ϱ_a, ϱ_c ist ungerade, weil genau eine der Zahlen ϱ, ϱ_c ungerade ist. Wie oben

schliesst man diesmal auf $t \mid (u+v)^4, t \mid (u-v)^4$ und deshalb auf $t=1$. Auch diese Dreiecke sind alle perfekt.

Satz 3. Zu jedem Inkreisradius ϱ gibt es nur endlich viele perfekte Dreiecke. Für $\varrho \geq 2$ ist mindestens eines davon weder rechtwinklig noch gleichschenklig; es gibt also unendlich viele perfekte Dreiecke, die weder rechtwinklig noch gleichschenklig sind.

Beweis: Es seien $a \leq b \leq c$; wir setzen $s-a=x$, $s-b=y$, $s-c=z$ und erhalten $s=x+y+z$, $A^2=xyz(x+y+z)$, $\varrho^2=\frac{xyz}{x+y+z}$, $\varrho_a^2=\frac{yz}{x}(x+y+z)$, $\varrho_b^2=\frac{xz}{y}(x+y+z)$, $\varrho_c^2=\frac{xy}{z}(x+y+z)$, $x \geq y \geqq z$. Für festes ϱ ergibt jede Lösung der diophantischen Gleichung (*) $xyz=\varrho^2(x+y+z)$ mit $x \mid \varrho(y+z), y \mid \varrho(x+z), z \mid \varrho(x+y)$ ein Dreieck mit den geforderten ganzzahligen Daten. Für $z > \varrho\sqrt{3}$ ist einerseits $xyz > 3\varrho^2 x$, andererseits $\varrho^2(x+y+z) \leq 3\varrho^2 x$; es folgt $z < \varrho\sqrt{3}$. Wir notieren (*) in der Form $(xz-\varrho^2)(yz-\varrho^2)=\varrho^2(z^2+\varrho^2)$; für jeden der endlich vielen Werte von z gibt es je nur endlich viele Lösungen von (*). Unter den so gefundenen endlich vielen Dreiecken befinden sich alle perfekten.
Jetzt wählen wir $z=1$. Die Gleichung $(x-\varrho^2)(y-\varrho^2)=\varrho^2(\varrho^2+1)$ hat sicher die Lösung $x=\varrho^3+\varrho^2+\varrho$, $y=\varrho^2+\varrho$; sie erfüllt alle Nebenbedingungen. Die zugehörige Schar (ungleichschenkliger) perfekter Dreiecke ist $a=\varrho^2+\varrho+1$, $b=\varrho^3+\varrho^2+\varrho+1$, $c=\varrho^3+2\varrho^2+2\varrho$ mit den Daten $A=\varrho(\varrho+1)(\varrho^2+\varrho+1)=\varrho_c$, $\varrho_a=\varrho+1$, $\varrho_b=\varrho^2+\varrho+1$. In einem rechtwinkligen Dreieck müsste $\varrho=s-c=z$ gelten. Wegen $z=1$ sind für $\varrho \geq 2$ alle Dreiecke der Schar nicht rechtwinklig.
Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Der Beweis von Satz 3 zeigt uns ein Verfahren, das alle perfekten Dreiecke mit vorgegebenem Inkreisradius ϱ liefert:

(A) Für jedes z mit $1 \leq z < \varrho\sqrt{3}$ zerlegt man $\varrho^2(z^2+\varrho^2)$ in zwei Faktoren AB, $A \geq B$.

(B) Von den Paaren $(x, y)=\left(\frac{\varrho^2+A}{z}, \frac{\varrho^2+B}{z}\right)$ wählt man die ganzzahligen aus und eliminiert daraus diejenigen, die eine der Bedingungen $x \mid \varrho(y+z)$, $y \mid \varrho(x+z)$, $z \mid \varrho(x+y)$ oder $x \geq y \geq z$ verletzen.

(C) Mit den verbleibenden Werten berechnet man $a, b, c, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$.

(D) Zuletzt scheidet man die Lösungen mit $(a, b, c, \varrho, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c) > 1$ aus.

Die folgende Tabelle ist nach diesem Verfahren aufgestellt worden und enthält alle perfekten Dreiecke mit Inkreisradius 5.

ϱ	a	b	c	ϱ_a	ϱ_b	ϱ_c	A
1	3	4	5	2	3	6	6
2	7	15	20	3	4	42	42
	5	12	13	3	10	15	30

ϱ	a	b	c	ϱ_a	ϱ_b	ϱ_c	A
3	13	40	51	4	13	156	156
	16	25	39	5	8	120	120
	8	26	30	4	16	48	96
	7	24	25	4	21	28	84
	8	15	17	5	12	20	60
	10	10	12	8	8	12	48
4	21	85	104	5	21	420	420
	12	50	58	5	24	120	240
	18	20	34	8	9	72	144
	15	15	24	9	9	36	108
	9	40	41	5	36	45	180
5	31	156	185	6	31	930	930
	36	91	125	7	18	630	630
	17	87	100	6	34	255	510
	13	68	75	6	39	130	390
	11	60	61	6	55	66	330
	12	35	37	7	30	42	210

J. Binz, Universität Bern und Städt. Gymnasium Bern-Kirchenfeld

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/87/020035-08$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 938. Die folgenden Summen:

$$S_0(m,n) := \sum_{s=0}^{n} \binom{2n+1}{2s} \binom{2n+m-s}{2n}$$

$$S_1(m,n) = \sum_{s=0}^{n} \binom{2n+2}{2s+1} \binom{2n+1+m-s}{2n+1}, \quad m, n \in \mathbf{N}$$

sind geschlossen auszuwerten.

J. Binz, Bolligen

Lösung

1. $\binom{2n+1}{2s}$ ist der Koeffizient von x^{2s} in $(1+x)^{2n+1}$, $\binom{2n+m-s}{2n}$ ist der Koeffizient von $x^{2(m-s)}$ in $\dfrac{1}{(1-x^2)^{2n+1}}$.

Also ist $S_0(m,n)$ der Koeffizient von x^{2m} in

$$((1+x)/(1-x^2))^{2n+1} = (1-x)^{-(2n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+2n}{2n} x^j.$$