

Kleine Mitteilung

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 3: **Archimedes was right. Part one**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Kleine Mitteilung

Note on the diophantine equation $1 + x + x^2 + \dots + x^n = y^m$

This equation has occurred from time to time in the literature. In this note, we shall treat some aspects of the lowest cases $m=2$ and $m=3$. Throughout we shall assume $|x| > 1$ and $n > 1$.

Theorem. *The Diophantine equation $1 + x + \dots + x^n = y^2$ has solutions only for $n=3$ and $n=4$, the solutions being $(7, \pm 20)$ and $(3, \pm 11)$, respectively. The Diophantine equation $1 + x + \dots + x^n = y^3$ has solutions only for $n=2$ unless n is of the form $6k+4$. The respective solutions are $(18, 7)$ and $(-19, 7)$.*

This was shown by W. Ljunggren [4] in 1943*, using results by D. Schepel [7] and T. Nagell [6]. Actually, the case $n=3$ for the first equation follows from a result already known to Fermat and subsequently proved by E. Lucas and A. Genocchi [2]. (See also [1], vol. II, p. 487.)

Considering only primes for x , the sum $1 + x + \dots + x^n$ can be interpreted as $\sigma(p^n)$, the sum of the divisors of p^n . The question for $m=2$ now reads: can $\sigma(p^n)$ ever be a square? It is easily seen that for $n=1$, $1 + p = y^2$ if and only if $p=3$, $y=2$. Hence the answer to our question is simply, that $\sigma(p^n)$ is a square only in the cases $p=3$, $n=1$ or 4, and $p=7$, $n=3$.

Recently, Takaku [8] has shown that $\sigma(p^n)$ a square requires p to be less than $2^{2^{n+1}}$. In view of Ljunggren's theorem this is quite staggering.

Returning to the second part of the theorem, let us remark that R. Guy ([3], p. 7) poses the following question on so-called repunits, i.e. numbers $1111\dots 11 = 1 + 10 + \dots + 10^n$: Can such a number ever be a cube? (It is known that, except 1, they can never be squares.) As $1 + 10$ is not a cube, a positive answer to Guy's question can only stem from $n = 6k + 4$. Using the elementary geometric summation formula, one obtains $10^{6k+6} - 10 = 90y^3$, which gives $y^3 \equiv 2 \pmod{7}$ and hence is impossible. Therefore, the answer to Guy's question is «no».

A. Rotkiewicz, Mathematics Institute PAN, Warszawa

REFERENCES

- 1 L. E. Dickson: History of the theory of numbers, New York 1952.
- 2 A. Genocchi: Nouvelles Annales de Math. (2), t. 2 (1885), p. 306.
- 3 Richard K. Guy: Unsolved problems in number theory. New York: Springer-Verlag 1981.
- 4 W. Ljunggren: Noen setninger om ubestemte likninger av formen $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Norsk Mat. Tidsskr. 1 Hefte, 25 (1943), pp. 17–20.
- 5 K. Mahler: Über den grössten Primteiler spezieller Polynome zweiten Grades. Archiv for Math. og Naturv. B. XLI. Nr. 6 (1935).
- 6 T. Nagell: Sur l'équation indéterminée $\frac{x^n-1}{x-1} = y^2$, Norsk. Mat. Forenings Skrifter I, No. 3 (1921), 17 pp.
- 7 D. Schepel: On the Pell equation (Dutch), Nieuw Arch. Wiskunde 18 (1935), p. 1–30.
- 8 A. Takaku: Prime numbers such that the sums of the divisors of their powers are perfect squares. Colloq. Math. 49, 117–121 (1984).

1* The author wishes to thank Prof. J. Brzezinski for a copy of Ljunggren's paper which was not available in Poland.