Eine neue Funktionalgleichung zur Bestimmung elliptischer Integrale erster Gattung und ihrer Umkehrungen

1. Das Problem

Die Berechnung des Parameterintegrals

$$F(x \mid m) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m t^2)}} \tag{1}$$

bereitet in der Nähe des Arguments

$$x = 1 - \varepsilon \tag{2}$$

Schwierigkeiten. Mit Hilfe der Funktionalgleichung

$$F(x \mid m) = K(m) - F\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-m x^2}} \,\middle|\, m\right) \tag{3}$$

lässt sich das Argument x entsprechend

$$F(1-\varepsilon \mid m) = K(m) - F\left(\sqrt{\frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{1-m(1-\varepsilon)^2}} \,\middle|\, m\right) \tag{4}$$

auf so kleine Werte reduzieren, dass nur wenige Glieder der Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} F(z \mid m) = {} & z + \frac{1}{6}(1+m) z^3 + \frac{1}{40}(3+2m+3m^2) z^5 + \\ & + \frac{1}{112}(5+3m+3m^2+5m^3) z^7 + \\ & + \frac{1}{1152}(35+20m+18m^2+20m^3+35m^4) z^9 + \\ & + \frac{1}{2816}(63+35m+30m^2+30m^3+35m^4+63m^5) z^{11} + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

benötigt werden, um die gewünschte Genauigkeit zu erhalten. Die Reihenentwicklung (5) erhält man durch Entwicklung des Integranden

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-m t^2)}} \tag{6}$$

in eine Potenzreihe mit anschließender gliedweiser Integration. Da im Integrationsintervall die binomische Reihe gleichmässig konvergiert, liefert die gliedweise Integration ebenfalls eine konvergente Reihe.
Von besonderer Bedeutung ist, dass in der benutzten Funktionalgleichung der Modul m unverändert bleibt.

2. Herleitung der Funktionalgleichung

Die Substitution

$$t=\sqrt{\frac{1-z^2}{1-m z^2}} \tag{7}$$

führt den Integranden (6) in die Form

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-m t^2)}}=\frac{1-m z^2}{(1-m) z} \tag{8}$$

und das Differential in

$$dt=-\frac{(1-m) z}{\sqrt{(1-z^2)(1-m z^2)^3}} dz \tag{9}$$

über, so dass die einfache Beziehung

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m t^2)}}=-\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m z^2)}} \tag{10}$$

resultiert. Das Minuszeichen vertauscht die aus der Umkehrung von (7)

$$z=\sqrt{\frac{1-t^2}{1-m t^2}} \tag{11}$$

resultierenden Integrationsgrenzen

$$z=1 \quad \text{für } t=0 \tag{12}$$

und

$$z=\sqrt{\frac{1-x^2}{1-m x^2}} \quad \text{für } t=x . \tag{13}$$

Auf diese Weise wird das Parameterintegral (1) in

$$F(x \mid m)=\int_{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-m x^2}}}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m z^2)}} \tag{14}$$

überführt, woraus mit

$$F(1 \mid m) = K(m) \tag{15}$$

die Beziehung

$$F(x \mid m) = K(m) - F\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-m x^2}} \,\middle|\, m\right) \tag{3}$$

hervorgeht (s. Abschnitt 1). Nach M. Abramowitz und I. A. Stegun [1] bedeutet $K(m)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung, welches für $|m| < 1$ aus

$$K(m) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot m^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot m^3 + \dots\right] \tag{16}$$

berechnet werden kann und dort in Schritten von 0,01 von $m = 0{,}00$ bis $m = 1{,}00$ tabuliert ist.

3. Erstes Anwendungsbeispiel

Wählt man als Modul $m = 0{,}5$ so sei als erste Aufgabe gestellt, das Integral

$$F(x \mid 0{,}5) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-0{,}5\,t^2)}} \tag{17}$$

für das Argument $x = 0{,}9999$ zu berechnen.
Die erzeugende Funktion

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-0{,}5\,t^2)}} \tag{18}$$

ist in Figur 1 analytisch und in Figur 2 graphisch dargestellt.
Die Integration bedeutet graphisch die Bestimmung des in Figur 2 schraffiert dargestellten Flächeninhaltes bis zum Argument x.
Die Funktionalgleichung führt auf

$$F(0{,}9999 \mid 0{,}5) = K(0{,}5) - F(0{,}019999 \mid 0{,}5) \tag{19}$$

wobei das vollständige Integral den Wert

$$K(0{,}5) = 1{,}854075 \tag{20}$$

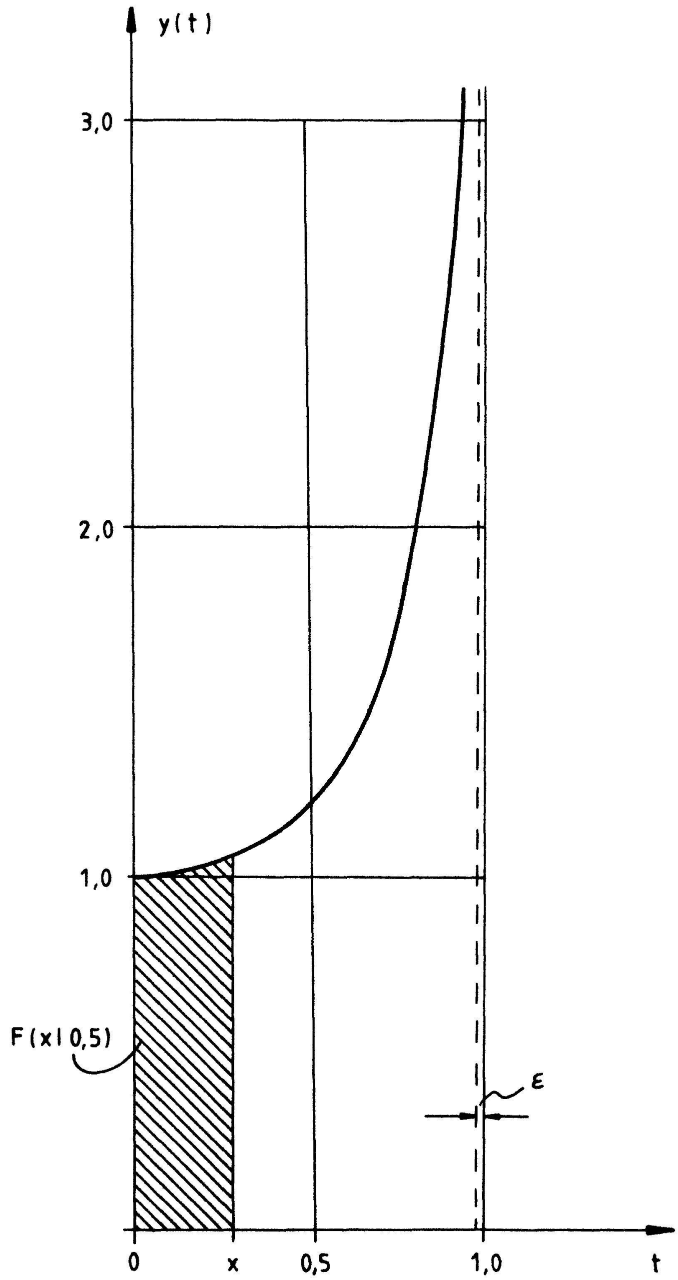
besitzt. Unter Verwendung der für $m = 0{,}5$ geltenden Reihenentwicklung

$$F(z \mid 0{,}5) = z + \frac{1}{4} z^3 + \frac{19}{160} z^5 + \frac{63}{896} z^7 + \frac{867}{18432} z^9 + \frac{3069}{90112} z^{11} + \dots \tag{21}$$

$m = 0{,}5$

t	$y(t)$
0,0	1,0000
0,1	1,0076
0,2	1,0310
0,3	1,0727
0,4	1,1375
0,5	1,2344
0,6	1,3804
0,7	1,6694
0,8	2,0211
0,9	2,9742
0,95	4,7675
0,99	9,9268
0,999	31,5991
0,9999	99,9925
1	∞

Figur 1.



Figur 2.

folgt

$$F(0{,}019999\,|\,0{,}5) = 0{,}019999 + 0{,}000002 + 0{,}000000 = 0{,}020001\,. \tag{22}$$

Um die sechste Stelle hinter dem Komma zu sichern, bedarf es hier nur zweier Glieder der Reihe, wobei das dritte Glied als Kontrollglied dient. Der gesuchte Wert beträgt somit:

$$F(0{,}9999\,|\,0{,}5) = 1{,}834074\,. \tag{23}$$

Der hier entwickelten Methode sei die Bestimmung des Integrals mittels der Transformation von J. Landen [2] gegenübergestellt, bei welcher die Substitution

$$t = \frac{2}{1+\sqrt{m}} \frac{z\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})^2}z^2}} \tag{24}$$

auf die Beziehung

$$F(x\,|\,m) = \frac{2}{1+\sqrt{m}} F\left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{(1-x^2)(1-m x^2)}+\sqrt{m}\,x^2}{2}} \;\middle|\; \frac{4\sqrt{m}}{(1+\sqrt{m})^2}\right) \tag{25}$$

führt mit dem reduzierten Argument

$$x_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{(1-x^2)(1-m x^2)}+\sqrt{m}\,x^2}{2}} \tag{26}$$

und dem erhöhten Modul:

$$m_1 = \frac{4\sqrt{m}}{(1+\sqrt{m})^2}\,. \tag{27}$$

Bei sukzessiver Anwendung der Argumenterniedrigung folgt:

$$F(x\,|\,m) = \sqrt[4]{\frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots m_n}{m}}\ \operatorname{artanh} x_n\,. \tag{28}$$

Die Moduli konvergieren gegen den Wert 1 und betragen:

$$m_1 = 0{,}970562749 \tag{29}$$

$$m_2 = 0{,}999944204 \tag{30}$$

$$m_3 = 1{,}000000000\,. \tag{31}$$

Da der Wert m_3 mit der hier festgelegten Genauigkeit (9 Dezimalen) 1,000000000 beträgt, sind mit $n = 3$ die Argumente bis x_3 zu bestimmen. Man erhält:

$$x_1 = 0{,}921130994 \tag{32}$$

$$x_2 = 0{,}914431658 \tag{33}$$

$$x_3 = 0{,}914418903\,. \tag{34}$$

Hieraus folgt:

$$F(0{,}9999\,|\,0{,}5) = 1{,}180340599 \cdot 1{,}553852491 = 1{,}834075\,. \tag{35}$$

Beide Rechenwerte stimmen gut miteinander überein. Es ist jedoch nicht zu übersehen, dass die zweite Methode ungleich viel aufwendiger ist als mittels der neuen Funktionalgleichung.

4. Zweites Anwendungsbeispiel

Bei dem Integral

$$F(x\,|-2)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1+2\,t^2)}} \tag{36}$$

ist der Modul m negativ. Die erzeugende Funktion

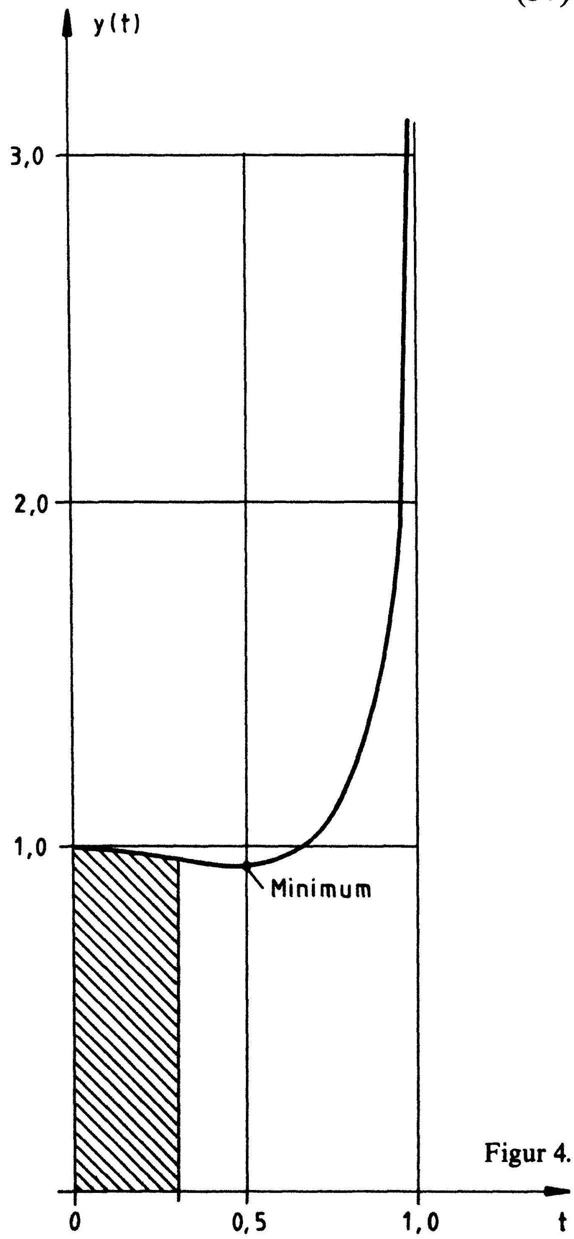
$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)\,(1+2\,t^2)}} \tag{37}$$

ist in Figur 3 analytisch und in Figur 4 graphisch dargestellt.

$m=-2$

t	$y(t)$
0,0	1,0000
0,1	0,9951
	0,2
0,9821	
0,3	0,9650
0,4	0,9497
0,5	0,9428
0,6	0,0531
0,7	0,9951
0,8	1,1038
0,9	1,4173
0,95	1,9122
0,99	4,1201
0,999	12,9218
0,9999	40,8286
1	∞

Figur 3.



Figur 4.

Figur 4 ist zu entnehmen, dass die erzeugende Funktion bei $t=0{,}5$ ein Minimum hat.

Mit Hilfe der Substitution

$$t=\sqrt{1-z^2} \tag{38}$$

lässt sich das Parameterintegral umformen in

$$F(x\,|\,m)=\frac{1}{\sqrt{1-m}}\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{1}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{m}{m-1}z^2\right)}} \tag{39}$$

d.h.:

$$F(x\,|\,m)=\frac{1}{\sqrt{1-m}}\left[K\left(\frac{m}{m-1}\right)-F\left(\sqrt{1-x^2}\,\middle|\,\frac{m}{m-1}\right)\right]. \tag{40}$$

Die Funktionalgleichung

$$F(X\,|\,M)=K(M)-F\left(\sqrt{\frac{1-X^2}{1-MX^2}}\,\middle|\,M\right) \tag{41}$$

liefert mit

$$X=\sqrt{1-x^2} \tag{42}$$

und

$$M=\frac{m}{m-1} \tag{43}$$

die Beziehung:

$$F\left(\sqrt{1-x^2}\,\middle|\,\frac{m}{m-1}\right)=K\left(\frac{m}{m-1}\right)-F\left(\frac{\sqrt{1-m}\cdot x}{\sqrt{1-mx^2}}\,\middle|\,\frac{m}{m-1}\right). \tag{44}$$

Nach Einsetzen folgt die für negative Moduli gültige Endbeziehung:

$$F(x\,|\,m)=\frac{1}{\sqrt{1-m}}F\left(\frac{\sqrt{1-m}\cdot x}{\sqrt{1-mx^2}}\,\middle|\,\frac{m}{m-1}\right). \tag{45}$$

Im vorliegenden Fall $m=-2$ resultiert:

$$F(x\,|-2)=\frac{1}{\sqrt{3}}F\left(\frac{\sqrt{3}\cdot x}{1+2x^2}\,\middle|\,\frac{2}{3}\right). \tag{46}$$

Beziehung (46) ist besonders für kleine Argumente x geeignet, die Integralfunktion numerisch zu bestimmen. Für Argumente in der Nähe des Grenzwertes 1 eignet sich

Beziehung (40), welche für $m = -2$ die Form annimmt:

$$F(x\,|-2) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[K\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\sqrt{1-x^2}\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)\right]. \tag{47}$$

Für das Argument $x = 0{,}9999$ folgt die Berechnungsformel:

$$F(0{,}9999\,|-2) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[K\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(0{,}014142\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)\right]. \tag{48}$$

Nach (16) gilt:

$$K\left(\frac{2}{3}\right) = 2{,}028959\,. \tag{49}$$

Die Reihenentwicklung (5) liefert für $m = \frac{2}{3}$:

$$F\left(z\,\middle|\,\frac{2}{3}\right) = z + \frac{5}{18}z^3 + \frac{17}{120}z^5 + \frac{215}{756}z^7 + \frac{5603}{93\,312}z^9 + \ldots. \tag{50}$$

Nach Einsetzen des Argumentes $z = 0{,}014142$ erhält man:

$$F(0{,}014142\,|-2) = 0{,}014142 + 0{,}000001 = 0{,}014143\,. \tag{51}$$

Hieraus folgt:

$$F(0{,}9999\,|-2) = 1{,}163225\,. \tag{52}$$

5. Umkehrung der Integralfunktion

Wird der Flächeninhalt gegeben und ist das Argument x gesucht, so liegt ein Umkehrproblem vor. Die Umkehrung des elliptischen Parameterintegrals $F(x\,|\,m)$ führt nach C. G. J. Jacobi [3] auf die nach ihm benannte Funktion

$$x(F\,|\,m) = sn\,(F\,|\,m) \tag{53}$$

und ihre Entwicklung:

$$\begin{aligned} x(F\,|\,m) = F &- \frac{1}{6}(1+m)\,F^3 + \frac{1}{120}(1+14m+m^2)\,F^5 + \\ &+ \frac{1}{5040}(1+135m+135m^2+m^3)\,F^7 + \\ &+ \frac{1}{362\,880}(1+1228m+5478m^2+1228m^3+m^4)\,F^9 + \\ &+ \frac{1}{39\,916\,800}(1+11\,069m+165\,826m^2+165\,826m^3+ \\ &\qquad + 11\,069m^4+m^5)\,F^{11} + \ldots \end{aligned} \tag{54}$$

Die Umkehrung der Funktionalgleichung liefert dagegen die Beziehung

$$x(F|m) = \sqrt{\frac{1 - sn^2(K - F|m)}{1 - m \cdot sn^2(K - F|m)}} \tag{55}$$

entsprechend:

$$x(F|m) = cd(K - F|m)\,. \tag{56}$$

Die Entwicklung der Jacobischen Funktion cd

$$cd(u|m) = 1 - \frac{1-m}{2} u^2 + \frac{5 - 6m - m^2}{24} u^4 + \ldots \tag{57}$$

liefert mit $u = K(m) - F$ die Potenzreihe:

$$x(F|m) = 1 + \frac{1-m}{2} [K(m) - F]^2 + \frac{5 - 6m - m^2}{24} [K(m) - F]^4 + \ldots . \tag{58}$$

Für $m = 0{,}5$ folgt unter Berücksichtigung des vollständigen Integrals

$$K(0{,}5) = 1{,}854075 \tag{59}$$

die Reihe:

$$x(F|0{,}5) = 1 + \frac{1}{4} [1{,}854075 - F]^2 + \frac{3}{32} [1{,}854075 - F]^4 + \ldots . \tag{60}$$

Wird ein Integralwert $F = 1{,}8$ vorgeschrieben, welcher nahe an den bestimmten Wert $K(0{,}5) = 1{,}854075$ heranreicht, so genügen schon zwei Glieder der Potenzreihenentwicklung, um das zugehörige Argument

$$x(1{,}8|0{,}5) = 1 - 0{,}000731 + 0{,}000000 = 0{,}999269 \tag{61}$$

zu bestimmen.
Die Umkehrung der Beziehung

$$x(F|m) = cn\left[K\left(\frac{m}{m-1}\right) - \sqrt{1-m}\,F \,\middle|\, \frac{m}{m-1}\right] \tag{62}$$

gestattet die Berechnung der Umkehrfunktion für negative Moduli. Die Entwicklung der Jacobischen Funktion cn

$$cn(u|m) = 1 - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1 + 4m}{24} u^4 - \frac{1 + 44m + 16m^2}{720} u^6 + \ldots \tag{63}$$

liefert mit $u = K\left(\frac{m}{m-1}\right) - \sqrt{1-m}\,F$ die Potenzreihe:

$$x(F\,|\,m) = 1 - \frac{1}{2}\left[K\left(\frac{m}{m-1}\right) - \sqrt{m-1}\,F\right]^2 + \frac{1+4m}{24}\left[K\left(\frac{m}{m-1}\right) - \sqrt{m-1}\,F\right]^4 - \frac{1+44m+16m^2}{720}\left[K\left(\frac{m}{m-1}\right) - \sqrt{m-1}\,F\right]^6 + \ldots. \tag{64}$$

Für $m = -2$ folgt unter Berücksichtigung des vollständigen Integrals

$$K\left(\frac{2}{3}\right) = 2{,}028959 \tag{65}$$

die Reihe:

$$x(F\,|-2) = 1 - \frac{1}{2}[2{,}028959 - 1{,}732051\,F]^2 + \frac{11}{72}[2{,}028959 - 1{,}732051\,F]^4 - \frac{337}{6480}[2{,}028959 - 1{,}732051\,F]^6 + \ldots \tag{66}$$

Soll das Argument $x(F\,|-2)$ an der Stelle $F = 1{,}1$ berechnet werden, die nahe am Wert des vollständigen Integrals $K(-2) = 1{,}171420$ heranreicht, so genügen schon drei Glieder der Potenzreihenentwicklung, um den gesuchten Zahlenwert

$$x(1{,}1\,|-2) = 1{,}000000 - 0{,}007651 + 0{,}000034 - 0{,}000000 = 0{,}992384 \tag{67}$$

zu bestimmen.

6. Verlauf der Integralfunktionen und ihrer Umkehrungen

In Figur 5 sind die Zahlentafeln der beiden Integralfunktionen und ihrer Umkehrungen zusammengestellt.
Der in Figur 6 dargestellte Verlauf der Integralfunktionen, welcher Figur 2 und 4 zuzuordnen ist, bildet den Abschluss dieser Arbeit.
Die Bestimmung elliptischer Integrale zweiter Gattung und ihrer Umkehrungen ist in Vorbereitung.

W. Dreyer, Clausthal

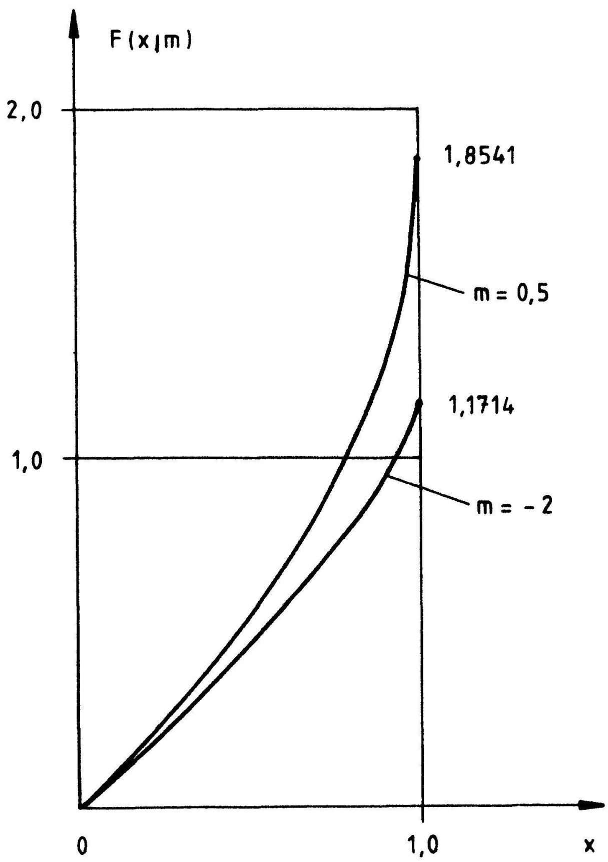
x	$F(x\|0{,}5)$
0,0	0,0000
0,1	0,1003
0,2	0,2020
0,3	0,3071
0,4	0,4173
0,5	0,5356
0,6	0,6658
0,7	0,8145
0,8	0,9939
0,9	1,2354
0,95	1,4121
0,99	1,6547
0,999	1,7927
0,9999	1,8341
1	1,8541

x	$F(x\|-2)$
0,0	0,0000
0,1	0,0998
0,2	0,1988
0,3	0,2961
0,4	0,3918
0,5	0,4863
0,6	0,5810
0,7	0,6780
0,8	0,7821
0,9	0,9050
0,95	0,9860
0,99	1,0895
0,999	1,1456
0,9999	1,1633
1	1,1714

F	$x(F\|0{,}5)$
0,0	0,0000
0,1	0,0998
0,2	0,1980
0,3	0,2934
0,4	0,3837
0,5	0,4708
0,6	0,5508
0,7	0,6243
0,8	0,6909
0,9	0,7505
1,0	0,8030
1,1	0,8487
1,2	0,8877
1,3	0,9205
1,4	0,9472
1,5	0,9682
1,6	0,9837
1,7	0,9941
1,8	0,9993
1,8541	1,0000

F	$x(F\|-2)$
0,0	0,0000
0,1	0,1102
0,2	0,2013
0,3	0,3045
0,4	0,4086
0,5	0,5145
0,6	0,6199
0,7	0,7219
0,8	0,8159
0,9	0,8964
1,0	0,9571
1,1	0,9924
1,1714	1,0000

Figur 5.



Figur 6.

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Abramowitz, I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Inc., New York (1968), Seite 591 (Formel) und Seite 608 (Tabelle).
2 H. Durège: Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig 1887, Seite 193.
3 C. G. J. Jacobi: Gesammelte Werke. Königlich-Preussische Akademie der Wissenschaften Berlin, Verlag G. Reiner, *1* (1881), Seite 81.

 0013-6018/87/040093-12$1.50+0.20/0

Kleine Mitteilungen

A supplement to Eddy's paper

In El. Math., Vol. 41/5, was published the following inequality for a triangle ABC

$$\sum n_a \leq 14R - 19r, \tag{*}$$

where n_a, n_b, n_c are the Nagel cevians, R is the circumradius and r the inradius of the given triangle.
The following inequality

$$\sum n_a \leq 10R - 11r \tag{1}$$

is more precise than the nequality (*).

Proof. Let IN_a denote the join of the incenter I and the point of contact N_a of the corresponding excircle with side BC of a given triangle ABC (similar for IN_b and IN_c). Applying the formulas $\sum a^2 = 2(s^2 - 4Rr - r^2)$ and $\sum bc = r^2 + s^2 + 4Rr$, where s represents the semiperimeter of ABC, to the inequality

$$\sum IN_a \leq \sqrt{6\sum a^2 - 6\sum bc + 9r^2}$$

in [2], we obtain

$$\sum IN_a \leq \sqrt{6s^2 - 72Rr - 9r^2}\,. \tag{2}$$

Then, since ([1], p. 50)

$$s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2,$$