

Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 4

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Abramowitz, I. A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Inc., New York (1968), Seite 591 (Formel) und Seite 608 (Tabelle).
- 2 H. Durège: Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig 1887, Seite 193.
- 3 C. G. J. Jacobi: Gesammelte Werke. Königlich-Preussische Akademie der Wissenschaften Berlin, Verlag G. Reiner, 1 (1881), Seite 81.

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/040093-12\$1.50+0.20/0

Kleine Mitteilungen

A supplement to Eddy's paper

In El. Math., Vol. 41/5, was published the following inequality for a triangle ABC

$$\sum n_a \leq 14R - 19r, \quad (*)$$

where n_a, n_b, n_c are the Nagel cevians, R is the circumradius and r the inradius of the given triangle.

The following inequality

$$\sum n_a \leq 10R - 11r \quad (1)$$

is more precise than the nequality (*).

Proof. Let IN_a denote the join of the incenter I and the point of contact N_a of the corresponding excircle with side BC of a given triangle ABC (similar for IN_b and IN_c). Applying the formulas $\sum a^2 = 2(s^2 - 4Rr - r^2)$ and $\sum bc = r^2 + s^2 + 4Rr$, where s represents the semiperimeter of ABC, to the inequality

$$\sum IN_a \leq \sqrt{6 \sum a^2 - 6 \sum bc + 9r^2}$$

in [2], we obtain

$$\sum IN_a \leq \sqrt{6s^2 - 72Rr - 9r^2}. \quad (2)$$

Then, since ([1], p. 50)

$$s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2,$$

(2) implies

$$\sum IN_a \leq \sqrt{24R^2 - 48Rr + 9r^2} . \tag{3}$$

The inequality $\sqrt{24R^2 - 48Rr + 9r^2} \leq 8R - 13r$ is equivalent to $2r \leq R$ in [1].
 On the basis of this conclusion, from (3) we get

$$\sum IN_a \leq 8R - 13r . \tag{4}$$

Therefore, starting with the inequalities ([2], p. 129; [1], p. 103)

$$\sum n_a \leq \sum AI + \sum IN_a \quad \text{and} \quad \sum AI \leq 2(R + r) ,$$

we conclude that (1) holds. Equality in (1) occurs only if the triangle is equilateral.

D. M. Milošević, Pranjani, YU

REFERENCES

- 1 O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić: Geometric Inequalities. Wolters-Noordhoff, Groningen 1969.
- 2 R. H. Eddy: An upper bound for a sequence of cevian inequalities. El. Math. 41, 128–130 (1986).

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/040104-02\$1.50 + 0.20/0

Werte zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen

In [1] wird für $b > a > 0$ die folgende Ungleichung bewiesen

$$(\sqrt{ab})^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < \left(\frac{a+b}{2}\right)^{b-a} . \tag{1}$$

Definiert man für $a > 0$ und $b > 0$

$$M_r(a, b) = \begin{cases} \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{1/r} & \text{falls } r \neq 0 \\ \sqrt{ab} & \text{falls } r = 0 \end{cases}$$

sowie

$$L(a, b) = \begin{cases} \frac{b-a}{\log b - \log a} & \text{falls } a \neq b \\ a & \text{falls } a = b \end{cases}$$

so gilt für $a \neq b$ [2]

$$M_0(a, b) < L(a, b) < M_{1/2}(a, b) . \tag{2}$$

Eine Verschärfung von (2) findet sich in [3]. In dieser Note wird eine Ungleichung vorgestellt, die (1) und (2) als Spezialfälle enthält. Überdies werden sich einige interessante neue Ungleichungen ergeben.

Fortan sei $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq b$ vorausgesetzt.

Satz: Ist die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und positiv und die Funktion $g: \left[\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so gilt

$$g(\sqrt{ab}) < \frac{\int_a^b f(t) g(h(t)) dt}{\int_a^b f(t) dt} < g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

wobei $h(t) = \sqrt{t(a+b-t)}$ sei.

Beweis: Durch Anwenden der geometrisch-arithmetischen Ungleichung und wegen

$$h(t) = \sqrt{ab + (t-a)(b-t)}$$

erhält man

$$\sqrt{ab} < h(t) < \frac{a+b}{2}$$

für alle $t \in (a, b)$, $t \neq \frac{a+b}{2}$. Wendet man darauf die Funktion g an und multipliziert die entstehende Ungleichung mit $f(t)$, so folgt die behauptete Ungleichung durch anschließende Integration. Q.E.D.

1. Beispiel: Wählt man $f(t) = 1$ und $g(x) = \log x$, so liefert der Satz die logarithmierte Form von (1).

2. Beispiel: Für $c > 0$, $d > 0$ und $c \neq d$ sei $a = \sqrt{c}$, $b = \sqrt{d}$, $f(t) = t^{-1}$ und $g(x) = x^2$. Hier erhält man

$$M_0(c, d) < L(c, d) < M_{1/2}(c, d)$$

also gerade die Ungleichung (2).

3. Beispiel: Mit $f(t) = t^{-1}$ und $g(x) = x^4$ liefert der Satz die Ungleichung

$$(ab)^2 < \frac{(b^2 - a^2)(a^2 + 4ab + b^2)}{12(\log b - \log a)} < \left(\frac{a+b}{2}\right)^4. \quad (3)$$

Die rechte Seite von (3) läßt sich wegen

$$2ab < \frac{b^2 - a^2}{\log b - \log a}$$

abschwächen zu

$$\frac{b^4 - a^4}{12(\log b - \log a)} + \frac{2}{3}(ab)^2 < \left(\frac{a+b}{2}\right)^4.$$

Setzt man hierin $c = a^4$ und $d = b^4$, so bekommt man die Ungleichung

$$L(c, d) < 3 M_{1/4}(c, d) - 2 M_0(c, d). \quad (4)$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass die beiden folgenden Ungleichungen äquivalent sind

$$(5 - \sqrt{24})^4 \leq \frac{c}{d} \leq (5 + \sqrt{24})^4 \quad (*)$$

$$3 M_{1/4}(c, d) - 2 M_0(c, d) \geq M_{1/2}(c, d).$$

Dies zeigt, daß (4) bei Bestehen von (*) schwächer ist als die rechte Seite von (2). In allen anderen Fällen ist (4) jedoch schärfer.

4. Beispiel: Für $f(t) = (t(a+b-t))^{-1/2}$ und $g(x) = x$ liefert der Satz die folgende Ungleichung

$$\frac{2}{a+b} < \frac{2}{b-a} \arcsin \frac{b-a}{b+a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Das Auffinden weiterer Ungleichungen mit Hilfe des obigen Satzes sei dem interessierten Leser überlassen.

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Alzer: Über einen Wert, der zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen liegt. *El. Math.* 40, 22–24 (1985).
- 2 B. C. Carlson: The logarithmic mean. *Am. Math. Monthly* 79, 615–618 (1972).
- 3 T. P. Lin: The power mean and the logarithmic mean. *Am. Math. Monthly* 81, 879–883 (1974).

The inscribed simplex in a centrally symmetric convex body in E^n

I. M. Yaglom and V. G. Boltyanskii in their beautiful book, see [1], prove that a general triangle cannot be contained in a centrally symmetric convex figure whose area is less than twice that of the triangle. Fary and Redei generalize in [3] the above result for a simplex p inscribed in a centrally symmetric convex body F in E^n . In the present note, using an elegant theorem of G. D. Chakerian, see [2], we obtain a short proof for the inequality

$$|F| \geq n |p|$$

where by $|K|$ we denote the volume of the convex body K . Fary and Redei's result is:

$$|F| \geq \binom{n}{n/2} |p| \quad \text{if } n \text{ is even}$$

$$|F| \geq \binom{n}{(n-1)/2} |p| \quad \text{if } n \text{ is odd.}$$

Our result is the best possible only for the case $n = 2, 3$.

Theorem. Let F be a centrally symmetric convex body in E^n and $p = A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ an inscribed simplex. Then it follows that:

$$|F| \geq n |p|.$$

Proof. Let 0 be the center of F and A'_i the centrally symmetric of the point A_i . We denote by p' the simplex $A'_1 A'_2 \dots A'_{n+1}$, and by P the n -simplex circumscribed to F with its facets parallel to those of p . It is not difficult to prove that:

$$|P| \geq n^n |p'| = n^n |p|. \quad (1)$$

Indeed, we consider the parallel plane from each vertex A'_i to the opposite facet. These planes, intersecting each other, form a n -simplex P_1 with its facets parallel to the facets of P . The points A'_i are the centroids of the facets of P_1 and obviously P_1 is included in P . Therefore

$$|P| \geq |P_1| = n^n |p'| = n^n |p|.$$

Now using Chakerian's theorem, see [2], we will have:

$$|F|^n \geq |P| |p|^{n-1},$$

and from (1)

$$|F|^n \geq n^n |p|^n$$

or,

$$|F| \geq n |p|.$$

George A. Tsintsifas, Thessaloniki, Greece

REFERENCES

- 1 I. M. Yaglom, V. G. Boltyanskii: Holt, Rinehart and Winston, page 34.
- 2 G. D. Chakerian: Minimum Area of Circumscribed Polygons. *El. Math.* Vol. 28, 5 (1973), 108–111.
- 3 I. Fary, L. Redei: Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern. *Math. Annalen* 122, 205–220 (1950).

The diophantine equation $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2$: a footnote

After my paper [1] had appeared, I noticed that the solution

$$(x, y, z) = (155, 48049, 2729)$$

given therein can be deduced from a result of Szymiczek's on triangular numbers in geometric progression, mentioned in [2].

A triangular number is an integer of the form $t_n = n(n+1)/2$, with n a positive integer. Szymiczek's result is that t_{77} , t_{1364} , t_{24024} are in geometric progression, that is,

$$t_{77} \cdot t_{24024} = (t_{1364})^2.$$

This can be written as

$$\begin{aligned} \{(2 \cdot 77 + 1)^2 - 1\} \{(2 \cdot 24024 + 1)^2 - 1\} &= \{(2 \cdot 1364 + 1)^2 - 1\}^2, \\ (155^2 - 1)(48049^2 - 1) &= (2729^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Shoichi Hirose, Mita High School, Tokyo, Japan

REFERENCES

- 1 S. Hirose: On a diophantine equation $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2$. El. Math. 42, 1-3 (1987).
- 2 D.A.Q.: Triangular square numbers: a postscript. Math. Gaz. 56, 311-314 (1972).

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/040109-01\$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 944. Für $p > 1$ bestimme man

$$\sup \left\{ - \int_0^1 f(x) \log x \, dx \mid \int_0^1 \left(x^{-1} \int_0^x |f(t)| \, dt \right)^p dx \leq 1 \right\}.$$

A. A. Jagers, Enschede, NL

Lösung: Ist $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die durch

$$F(x) := \begin{cases} |f(0)| & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| \, dt & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$