

# Ceva-Dreiecke

Autor(en): **Seebach, K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 5

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40041>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

- 5 M. Jovanović: Inequalities for the triangle. These Publications N° 412–460, 155–157 (1973).  
 6 D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec: Recent advances in geometric inequalities (the book) (to appear).  
 7 M. Petrović: Računanje sa brojnim razmacima. Gradjevinska knjiga, Beograd 1969.

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/050000-00\$1.50+0.20/0

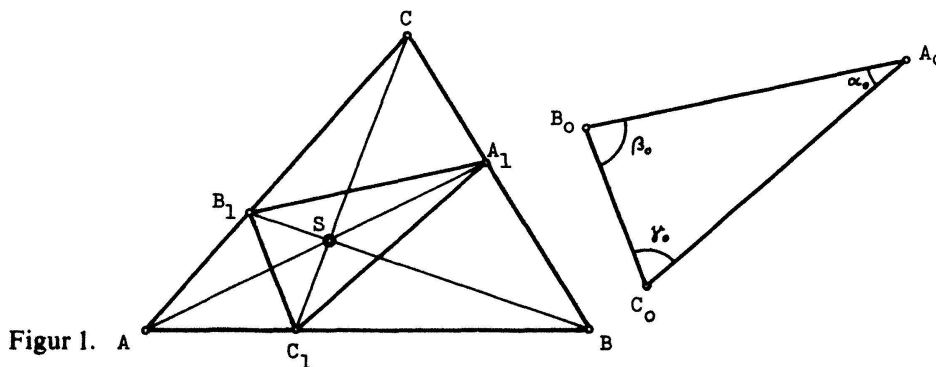
## Ceva-Dreiecke

Ein in einem Dreieck  $ABC$  einbeschriebenes Dreieck  $A_1B_1C_1$  (Fig. 1) möge *Ceva-Dreieck* heissen, wenn sich die drei Transversalen  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  in einem Punkt  $S$  schneiden. Nach dem Satz von *Ceva* tritt dies genau dann ein, wenn die drei Teilverhältnisse

$$[ABC_1] = -\tau < 0; \quad [BCA_1] = -\varrho < 0; \quad [CAB_1] = -\sigma < 0 \quad (1)$$

der Gleichung genügen

$$\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1. \quad (2)$$



Figur 1. A

Im folgenden soll gezeigt werden:

**Satz 1:** Gegeben sei ein beliebiges Dreieck  $ABC$  und ein ebenfalls beliebiges Dreieck  $A_0B_0C_0$  (Fig. 1). Dann gibt es genau ein dem Dreieck  $ABC$  einbeschriebenes Ceva-Dreieck  $A_1B_1C_1$ , das dem Dreieck  $A_0B_0C_0$  ähnlich ist.

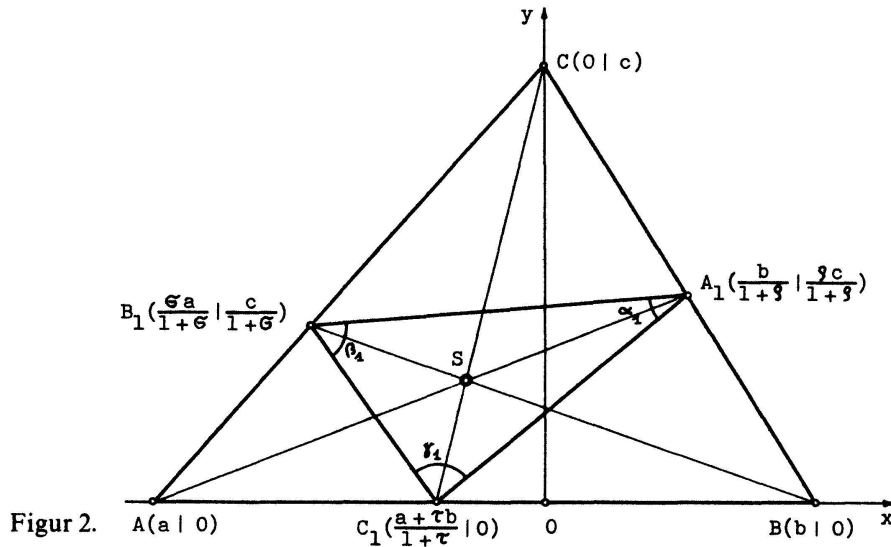
**Beweis:** Zunächst weisen wir die *Existenz* eines solchen Dreiecks  $A_1B_1C_1$  nach. Dazu führen wir ein Koordinatensystem ein, das dem vorgegebenen Dreieck  $ABC$  nach Fig. 2 angepasst ist.

Aus der Figur können die Bezeichnungen für die Masszahlen der Winkel (im Bogenmass) sowie die Koordinaten der Punkte (in Abhängigkeit von den Teilverhältnissen  $\varrho$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ ) abgelesen werden. Dabei dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass

$$b, c, b-a \in \mathbf{R}^+; \quad a \in \mathbf{R}; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbf{R}^+; \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi. \quad (3)$$

Die geforderte Bedingung der Ähnlichkeit von Dreieck  $A_1B_1C_1$  zum «Formdreieck»  $A_0B_0C_0$  besagt dann

$$\alpha_1 = \alpha_0; \quad \beta_1 = \beta_0; \quad \gamma_1 = \gamma_0. \tag{4}$$



Mit Hilfe der Skalarprodukte erhalten wir unter Berücksichtigung von (4) folgende Beziehungen

$$\overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1B_1} = |C_1A_1| \cdot |C_1B_1| \cdot \cos \gamma_0, \tag{5}$$

$$\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = |A_1B_1| \cdot |A_1C_1| \cdot \cos \alpha_0, \tag{6}$$

die zusammen mit (2) ein System von drei Gleichungen für die drei Unbekannten  $q, \sigma, \tau$  darstellen. Unser Problem ist also auf die Lösbarkeit des Systems (2), (5) und (6) – und zwar mit Werten  $q, \sigma, \tau \in \mathbb{R}^+$  – zurückgeführt.

Zur genaueren Untersuchung dieser Frage formen wir zunächst (5) um, indem wir die Koordinaten der Punkte einsetzen:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{b}{1+q} - \frac{a+\tau b}{1+\tau} \right) \cdot \left( \frac{\sigma a}{1+\sigma} - \frac{a+\tau b}{1+\tau} \right) + \frac{qc}{1+q} \cdot \frac{c}{1+\sigma} \\ &= \sqrt{\left( \frac{b}{1+q} - \frac{a+\tau b}{1+\tau} \right)^2 + \left( \frac{qc}{1+q} \right)^2} \cdot \sqrt{\left( \frac{\sigma a}{1+\sigma} - \frac{a+\tau b}{1+\tau} \right)^2 + \left( \frac{c}{1+\sigma} \right)^2} \cdot \cos \gamma_0. \end{aligned}$$

Elimination von  $\sigma$  mittels (2) ergibt nach elementarer Umformung:

$$\begin{aligned} & [(b^2+c^2) \cdot \tau^2 + 2(ab+c^2) \cdot \tau + (a^2+c^2)] \cdot q^2 - (b-a)^2 \\ &= \sqrt{[q \cdot (a+\tau b) - (b-a)]^2 + q^2 \cdot (1+\tau)^2 \cdot c^2} \\ & \cdot \sqrt{[q \cdot (a+\tau b) + (b-a)]^2 + q^2 \cdot (1+\tau)^2 \cdot c^2} \cdot \cos \gamma_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Verfährt man in analoger Weise mit Gleichung (6), so erhält man:

$$\begin{aligned} & [-(b^2+c^2)\cdot\tau^2+(a^2+c^2)]\cdot\varrho^2-2a(b-a)\cdot\varrho+(b-a)^2 \\ &= \sqrt{\{[a(1+\varrho)-b]+\varrho\tau b\}^2+\varrho^2\cdot(\tau+1)^2\cdot c^2} \\ & \cdot \sqrt{\{[a(1+\varrho)-b]-\varrho\tau b\}^2+\varrho^2\cdot(\tau-1)^2\cdot c^2}\cdot\cos\alpha_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Quadrieren von (7) und (8) würde zu zwei Folgegleichungen von der Form  $P(\varrho, \tau) = 0$  und  $Q(\varrho, \tau) = 0$  führen, wobei  $P(\varrho, \tau)$ ,  $Q(\varrho, \tau)$  im allgemeinen Polynome vom 8. Grad in den Variablen  $\varrho$  und  $\tau$  darstellen. Das System  $P(\varrho, \tau) = 0$  und  $Q(\varrho, \tau) = 0$  hat zwar nach dem Bezoutschen Theorem  $8 \cdot 8 = 64$  Lösungen  $(\varrho, \tau)$  im Körper der komplexen Zahlen, unter denen sich auch – falls vorhanden – die Lösungen  $(\varrho, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  von (7) und (8) befinden müssen, doch scheint eine Lösung des Problems auf diesem algebraischen Weg ziemlich aussichtslos. Trotzdem werden uns die Gleichungen (7) und (8) von Nutzen sein.

Im folgenden wird uns eine geometrisch-analytische Betrachtungsweise weiterführen. Zunächst beweisen wir

**Lemma 1:** Sei  $C_1 \in ]AB[$  beliebig gewählt. Dann gibt es stets genau ein dem Dreieck  $ABC$  einbeschriebenes Ceva-Dreieck  $A_1B_1C_1$  mit  $\gamma_1 = \gamma_0$ .

Sei  $S$  (Fig. 1) der Transversalenschnittpunkt auf  $]CC_1[$ . Man erkennt unmittelbar: Läuft  $S$  auf  $]CC_1[$  bei festem  $C_1$  von  $C$  nach  $C_1$ , so wächst  $\gamma_1$  monoton von 0 bis  $\pi$  (Grenzen ausgenommen). Es gibt somit genau eine Lage von  $S$  auf  $]CC_1[$  mit zugehörigem Winkel  $\gamma_1 = \gamma_0$ .

Wir denken uns nun den Winkel  $\gamma_1 (= \gamma_0)$  fest gegeben. Jedem Punkt  $C_1 \in ]AB[$  ist dann nach Lemma 1 genau ein Punkt  $A_1 \in ]BC[$  und ein Punkt  $B_1 \in ]AC[$  so zugeordnet, dass Dreieck  $A_1B_1C_1$  ein Ceva-Dreieck mit  $\gamma_1 = \gamma_0$  ist. Da die Punkte  $C_1, A_1, B_1$  eindeutig durch die Teilverhältnisse  $\tau, \varrho, \sigma \in \mathbb{R}^+$  festgelegt sind, definiert Lemma 1 bei gegebenem  $\gamma_0$  zwei Abbildungen:

$$\begin{aligned} \varrho: \mathbb{R}^+ \ni \tau &\mapsto \varrho(\tau) \in \mathbb{R}^+ \\ \sigma: \mathbb{R}^+ \ni \tau &\mapsto \sigma(\tau) \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (9)$$

Wegen der Ceva-Bedingung:  $\varrho(\tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot \tau = 1$  können wir uns vorerst auf die Untersuchung der Funktion  $\tau \mapsto \varrho(\tau)$  beschränken.

Von entscheidender Bedeutung für das folgende ist nun das Verhalten dieser Funktion  $\tau \mapsto \varrho(\tau)$  für  $\tau \rightarrow 0$  bzw. für  $\tau \rightarrow +\infty$ . Zunächst stellen wir fest: Für alle Paare  $(\tau, \varrho(\tau)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  muss Gleichung (7) erfüllt sein; anders ausgedrückt:

**Lemma 2:** Gleichung (7) hat für jedes  $\tau \in \mathbb{R}^+$  genau eine Lösung  $\varrho = \varrho(\tau) \in \mathbb{R}^+$ .

Als Lösung von (7) ist  $\varrho(\tau)$  eine algebraische Funktion von  $\tau$ , ist also an der Stelle  $\tau = 0$  stetig. Es existiert somit  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \varrho(\tau) = \varrho(0) = \bar{\varrho}$  und wegen  $\varrho(\tau) > 0$  für  $\tau \in \mathbb{R}^+$  ist



$\bar{\varrho} \geq 0$ . Wir zeigen, dass sogar  $\bar{\varrho} > 0$  gilt. Nun genügt  $\bar{\varrho} = \varrho(0)$  der Gleichung, die aus (7) für  $\tau = 0$  hervorgeht:

$$(a^2 + c^2) \cdot \bar{\varrho}^2 - (b - a)^2 = \sqrt{[(a^2 + c^2) \bar{\varrho}^2 + (b - a)^2]^2 - 4 a^2 \cdot (b - a)^2 \bar{\varrho}^2} \cdot \cos \gamma_0. \quad (10)$$

Die Annahme  $\bar{\varrho} = 0$  führt auf den Widerspruch:

$$-(b - a)^2 = (b - a)^2 \cdot \cos \gamma_0 \Rightarrow \cos \gamma_0 = -1 \Rightarrow \gamma_0 = \pi.$$

Damit haben wir

**Lemma 3:**  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \varrho(\tau) = \varrho(0) = \bar{\varrho} \in \mathbb{R}^+$ .

Bezeichnen wir denjenigen Punkt auf  $]BC[$ , der dem Teilverhältnis  $\bar{\varrho} > 0$  zugeordnet ist, mit  $\bar{A}_1$ , so erhalten wir

**Lemma 4:** Bei festem Winkel  $\gamma_1 = \gamma_0$  strebt für  $\tau \rightarrow 0$  (also  $C_1 \rightarrow A$ ) der Punkt  $A_1$  des Ceva-Dreiecks gegen einen (von  $\gamma_0$  abhängigen) Grenzpunkt  $\bar{A}_1 \in ]BC[$ , der dem Teilverhältnis  $\bar{\varrho} = \varrho(0) \in \mathbb{R}^+$  (vgl. Lemma 3) entspricht. Kurz:

$$\lim_{C_1 \rightarrow A} A_1 = \bar{A}_1 \in ]BC[. \quad (11)$$

Aus Analogiegründen können wir die Eigenschaften der Abbildung (9)  $\tau \mapsto \varrho(\tau)$  auf die Abbildung  $\tau \mapsto \sigma(\tau)$  übertragen. Dem Grenzprozess  $C_1 \rightarrow A$  ( $\tau \rightarrow 0$ ) entspricht dabei der Grenzprozess  $C_1 \rightarrow B$  ( $\tau \rightarrow +\infty$ ). Wir erhalten so

**Lemma 5:** Bei festem Winkel  $\gamma_1 = \gamma_0$  strebt für  $\tau \rightarrow +\infty$  (also  $C_1 \rightarrow B$ ) der Punkt  $B_1$  des Ceva-Dreiecks gegen einen (von  $\gamma_0$  abhängigen) Punkt  $\bar{B}_1 \in ]AC[$ , der einem gewissen Teilverhältnis  $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}^+$  entspricht. Kurz:

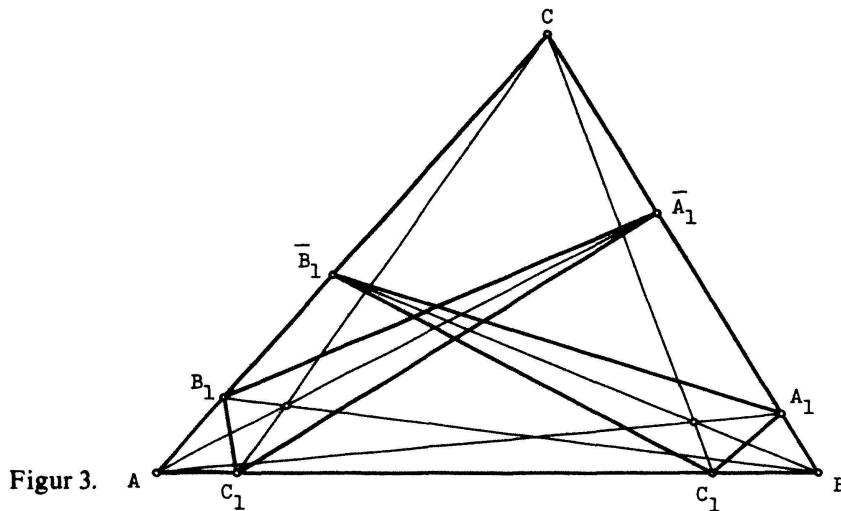
$$\lim_{C_1 \rightarrow B} B_1 = \bar{B}_1 \in ]AC[. \quad (12)$$

Wegen  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \varrho(\tau) = \bar{\varrho} \in \mathbb{R}^+$ ,  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sigma(\tau) = \bar{\sigma} \in \mathbb{R}^+$  ergeben sich aus der Ceva-Bedingung  $\varrho(\tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot \tau = 1$  die weiteren Grenzwerte:  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varrho(\tau) = 0$ ;  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma(\tau) = +\infty$ . Damit haben wir

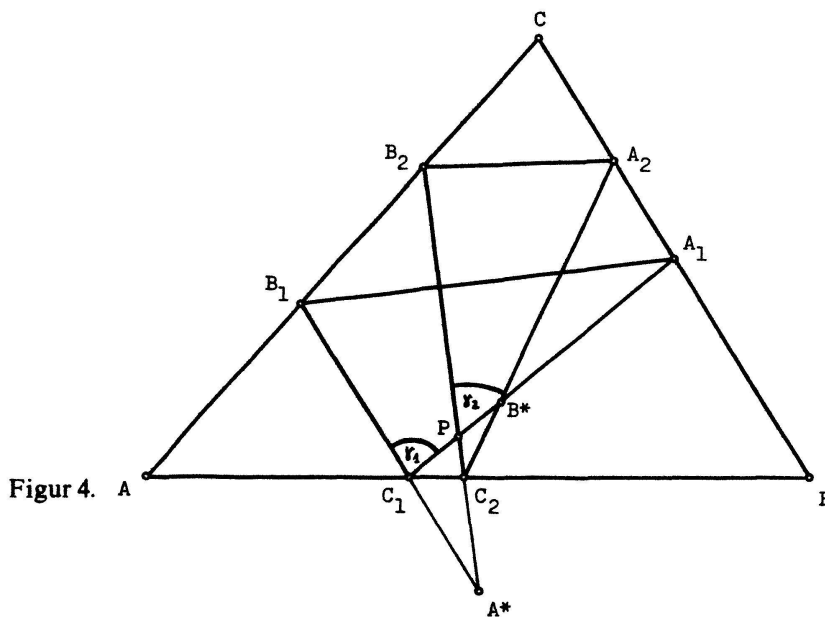
**Lemma 6:** Bei festem  $\gamma_1 = \gamma_0$  strebt für  $\tau \rightarrow +\infty$  (also  $C_1 \rightarrow B$ ) der Punkt  $A_1$  des Ceva-Dreiecks gegen  $B$ , für  $\tau \rightarrow 0$  (also  $C_1 \rightarrow A$ ) der Punkt  $B_1$  des Ceva-Dreiecks gegen  $A$ . Kurz:

$$\lim_{C_1 \rightarrow B} A_1 = B; \quad \lim_{C_1 \rightarrow A} B_1 = A. \quad (13)$$

Figur 3 möge diese Grenzfälle des Ceva-Dreiecks für  $C_1 \rightarrow A$  bzw.  $C_1 \rightarrow B$  verdeutlichen.



Figur 3.



Figur 4.

Betrachten wir nun die Winkel  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  des Ceva-Dreiecks, die an den Ecken  $A_1$  bzw.  $B_1$  auftreten, in Abhängigkeit von  $\tau$ ; dabei sei nach wie vor der Winkel  $\gamma_1$  bei  $C_1$  festgehalten:  $\gamma_1 = \gamma_0$ . Aus Figur 3 ist unmittelbar ersichtlich, dass für  $\tau \rightarrow 0$  (also  $C_1 \rightarrow A$ ) der Winkel  $\alpha_1$  gegen 0 konvergiert, ebenso der Winkel  $\beta_1$  für  $\tau \rightarrow +\infty$  (also  $C_1 \rightarrow B$ ). Also

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha_1 = 0; \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \beta_1 = 0; \quad \gamma_1 = \gamma_0. \tag{14}$$

Wegen  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$  und  $\gamma_1 = \gamma_0$  folgt daraus weiter

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \alpha_1 = \pi - \gamma_0; \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \beta_1 = \pi - \gamma_0. \tag{15}$$

Wir haben somit (bei festem  $\gamma_1 = \gamma_0$ ) eine Abbildung, die jedem  $\tau \in \mathbb{R}^+$  zwei Winkel  $\alpha_1(\tau)$ ,  $\beta_1(\tau)$  zuordnet, die als Dreieckswinkel der Bedingung genügen:

$$0 < \alpha_1(\tau), \beta_1(\tau) < \pi - \gamma_0. \tag{16}$$

Diese Abbildung ist aus geometrischen Gründen stetig; daher folgt aus (14) und (15) nach dem Zwischenwertsatz, dass die beiden Funktionen

$$\mathbb{R}^+ \ni \tau \mapsto \alpha_1(\tau) \in ]0, \pi - \gamma_0[; \quad \mathbb{R}^+ \ni \tau \mapsto \beta_1(\tau) \in ]0, \pi - \gamma_0[ \quad (17)$$

surjektiv sind. Zu gegebenem Winkel  $\alpha_0 \ni ]0, \pi - \gamma_0[$  gibt es also mindestens ein  $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$  mit der Eigenschaft  $\alpha_1(\tau_0) = \alpha_0$ , womit automatisch auch  $\beta_1(\tau_0) = \beta_0$  erfüllt ist. Damit ist der Existenznachweis eines Ceva-Dreiecks  $A_1B_1C_1 \sim A_0B_0C_0$  erbracht.

Die *Eindeutigkeit* soll nun auf geometrischem Wege nachgewiesen werden. Dazu beweisen wir folgenden Satz 2, aus dem die Eindeutigkeitsaussage von Satz 1 unmittelbar hervorgeht.

**Satz 2:** *Zwei demselben Dreieck ABC einbeschriebene zueinander ähnliche Ceva-Dreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $A_2B_2C_2$  sind identisch.*

**Beweis:** Haben die beiden Ceva-Dreiecke einen Eckpunkt gemeinsam, etwa  $C_1 = C_2$ , so folgt unmittelbar aus Lemma 1, dass dann auch gilt:  $A_1 = A_2$  und  $B_1 = B_2$ . Wir können also für das folgende annehmen:  $A_1 \neq A_2, B_1 \neq B_2, C_1 \neq C_2$ . Analog zu (1) sei

$$\begin{aligned} [ABC_i] &= -\tau_i < 0; & [BCA_i] &= -\varrho_i < 0; \\ [CAB_i] &= -\sigma_i < 0; & \varrho_i \cdot \sigma_i \cdot \tau_i &= 1; \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (18)$$

Wegen  $A_1 \neq A_2, \dots$  gilt dann:  $\varrho_1 \neq \varrho_2, \sigma_1 \neq \sigma_2, \tau_1 \neq \tau_2$ . Nun sind wegen  $\varrho_i \cdot \sigma_i \cdot \tau_i = 1, (i = 1, 2)$  die beiden Fälle  $\varrho_1 < \varrho_2, \sigma_1 < \sigma_2, \tau_1 < \tau_2$  bzw.  $\varrho_1 > \varrho_2, \sigma_1 > \sigma_2, \tau_1 > \tau_2$  ausgeschlossen. Bleiben also nur die Möglichkeiten, dass zweimal das «<»-Zeichen und einmal das «>»-Zeichen steht oder umgekehrt. Durch Vertauschung der Indizes 1, 2 und gegebenenfalls durch Umbenennung der Eckpunkte kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass gilt:  $\tau_1 < \tau_2, \varrho_1 < \varrho_2, \sigma_1 > \sigma_2$ . Es gelten also (Fig. 4) die Zwischenrelationen:

$$\langle AC_1C_2 \rangle; \quad \langle BA_1A_2 \rangle; \quad \langle CB_2B_1 \rangle. \quad (19)$$

Mehrmalige Anwendung des Axioms von Pasch auf geeignete Teildreiecke in Figur 4 liefert die Existenz der Schnittpunkte  $A^*, B^*, P$  mit den Anordnungsbeziehungen

$$\langle A^*C_1B_1 \rangle, \quad \langle A^*C_2P \rangle, \quad \langle C_1PB^* \rangle. \quad (20)$$

Daraus folgt mittels des Satzes vom Aussenwinkel, angewandt auf die Dreiecke  $C_1PA^*$  und  $C_2PB^*$ :

$$\gamma_1 = \sphericalangle B_1C_1P > \sphericalangle C_1PC_2 > \sphericalangle PC_2B^* = \gamma_2. \quad (21)$$

Die Annahme  $A_1 \neq A_2, B_1 \neq B_2, C_1 \neq C_2$  führt also auf  $\gamma_1 > \gamma_2$ , d. h. dass die beiden Dreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $A_2B_2C_2$  nicht ähnlich sind, im Widerspruch zur Voraussetzung von Satz 2. Dieser ist damit bewiesen.

Aus Satz 1 ergibt sich durch Umdeutung folgender

**Satz 3:** Gegeben seien zwei Dreiecke  $A_1B_1C_1$  und  $A_0B_0C_0$ . Dann gibt es genau ein zu  $A_0B_0C_0$  ähnliches Dreieck  $ABC$ , in dem  $A_1B_1C_1$  Ceva-Dreieck ist.

**Beweis:** Man konstruiere zu  $A_0B_0C_0$  das nach Satz 1 existierende Ceva-Dreieck  $A_1^*B_1^*C_1^*$ , das zu  $A_1B_1C_1$  ähnlich ist und führe dann durch eine Ähnlichkeitstransformation  $A_1^*B_1^*C_1^*$  in  $A_1B_1C_1$  über. Dabei geht  $A_0B_0C_0$  in ein zu ihm ähnliches Dreieck  $ABC$  über. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 2.

Schliesslich merken wir noch eine weitere Folgerung aus Satz 1 an:

**Satz 4:** Das Gleichungssystem (7), (8) hat unter den Bedingungen (3) genau eine Lösung  $(\varrho, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Dieser Satz 4 gibt uns ein Verfahren in die Hand, bei gegebenen Dreiecken  $ABC$  und  $A_0B_0C_0$  das zugehörige Ceva-Dreieck  $A_1B_1C_1$  näherungsweise zu berechnen, indem man das System (7), (8) – etwa nach dem zweidimensionalen Newton-Verfahren – nach  $\varrho$  und  $\tau$  auflöst. So erhält man z.B. für  $a=0, b=c=1$  (gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck) und  $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}; \beta_0 = \frac{\pi}{3}; \gamma_0 = \frac{\pi}{2}$  (Zeichendreieck) die Näherungswerte  $\tau \approx 0,3234; \varrho \approx 0,7340$  und damit die Eckpunkte  $A_1(0,5767 | 0,4233); C_1(0,2444 | 0)$ .

Zum Abschluß sei noch auf einen Zusammenhang des hier behandelten Problems mit der Theorie der Sechseck-Gewebe hingewiesen [1\*], auf den mich Herr Jeger aufmerksam gemacht hat. Sei  $\Delta$  die Menge der Punkte im Inneren des Dreiecks  $ABC$ . Jeder Punkt  $S \in \Delta$  definiert genau ein dem Dreieck  $ABC$  einbeschriebenes Ceva-Dreieck  $A_1B_1C_1$  mit  $S$  als Transversalenschnittpunkt. Sind  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  die Winkel dieses Dreiecks  $A_1B_1C_1$  (Fig. 2), so werden also jedem  $S \in \Delta$  drei Zahlen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}^+$  mit  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$  zugeordnet. Betrachten wir nun in  $\Delta$  die Kurven für  $S$ , längs denen jeweils einer der drei Dreieckswinkel konstant ist ( $\alpha_0$  bzw.  $\beta_0$  bzw.  $\gamma_0$ ):

$$\begin{aligned} K_\alpha: & \{S \in \Delta \mid \alpha_1 = \alpha_0\}; & 0 < \alpha_0 < \pi \\ K_\beta: & \{S \in \Delta \mid \beta_1 = \beta_0\}; & 0 < \beta_0 < \pi \\ K_\gamma: & \{S \in \Delta \mid \gamma_1 = \gamma_0\}; & 0 < \gamma_0 < \pi. \end{aligned} \quad (22)$$

Durch jeden Punkt  $S \in \Delta$  geht jeweils genau eine Kurve aus jeder der drei Scharen (22). Satz 2 besagt, dass sich zwei Kurven verschiedener Scharen in höchstens einem Punkt schneiden. (22) bildet daher ein sogenanntes Kurvengewebe. Sei nun in einer  $(\alpha_1 | \beta_1)$ -Ebene das Gebiet

$$W = \{(\alpha_1 | \beta_1) \mid \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}^+ \wedge \alpha_1 + \beta_1 < \pi\} \quad (23)$$

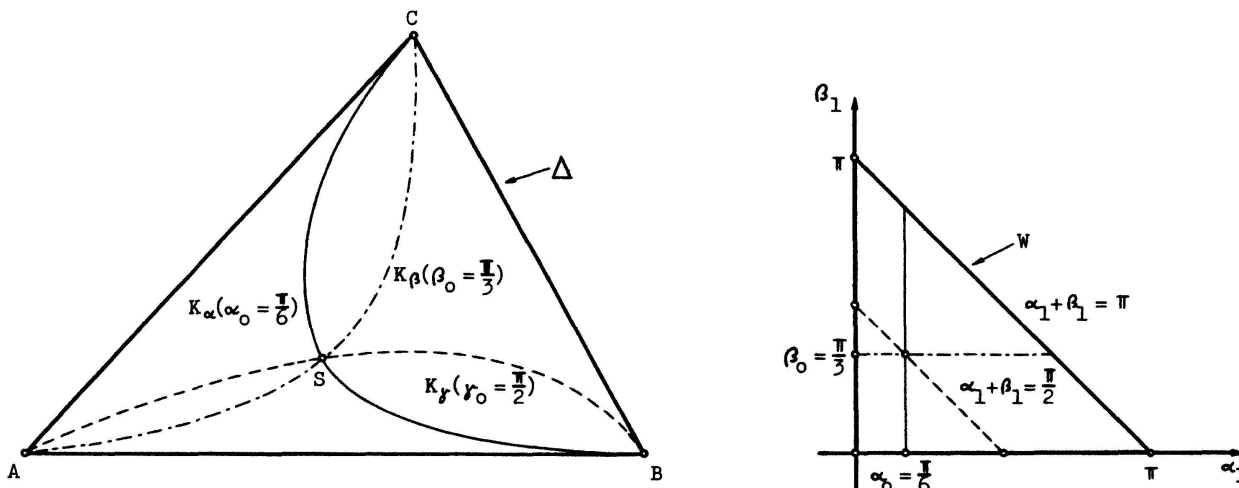
gegeben. Jedem  $S \in \Delta$  ist nach den obigen Überlegungen ein Tripel  $(\alpha_1 | \beta_1 | \gamma_1)$  mit  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$ , also genau ein Punkt  $(\alpha_1 | \beta_1) \in W$  zugeordnet. Die Abbildung

$$F: \Delta \ni S \mapsto (\alpha_1 | \beta_1) \in W \quad (24)$$

ist nach Satz 1 bijektiv, es existiert also auch  $F^{-1}: W \rightarrow \Delta$ .

Da  $F, F^{-1}$  aus geometrischen Gründen stetig sind, ist  $F^{-1}: W \rightarrow \Delta$  eine topologische Abbildung. Die Kurven  $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$  in  $\Delta$  erweisen sich somit als topologische Bilder folgender drei Parallelenscharen in  $W$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 \wedge 0 < \beta_1 < \pi - \alpha_0 \\ \beta_1 &= \beta_0 \wedge 0 < \alpha_1 < \pi - \beta_0 \\ \alpha_1 + \beta_1 &= \pi - \gamma_0 \wedge 0 < \alpha_1 < \pi - \gamma_0. \end{aligned} \tag{25}$$



Figur 5.

Ein Kurvengewebe, dessen Scharen die topologischen Bilder von drei Parallelenscharen sind, heisst ein *Sechseck-Gewebe*. Das Verhalten der Kurven  $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$  in der Nähe der Eckpunkte  $A, B, C$  kann aus Figur 4 erschlossen werden. Die Figur 5 zeigt je eine Kurve  $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$  der drei Scharen des Sechseck-Gewebes in  $\Delta$  sowie ihre topologischen Urbilder (25) in  $W$ . Man erhält zu gegebenen Werten  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  den Punkt  $S$  als Schnittpunkt der drei Kurven  $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$  und mit  $S$  auch das gesuchte Ceva-Dreieck.

Für die Reinzeichnung der Figuren möchte ich Herrn *P. Schöbi* (ETH-Zürich) herzlich danken.

K. Seebach  
Universität München, Math. Institut

ANMERKUNG

[1\*] Vgl. W. Blaschke und G. Bol: Geometrie der Gewebe; Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. XLIX; Berlin 1938.