Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 947. Es bezeichne $F(n)$ die n-te Fibonaccizahl. Man ermittle den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n F(2n+1)}{F(n^2)\,F((n+1)^2)}.$$

L. Kuipers, Sierre

Lösung. Es bezeichne S den zu ermittelnden Wert und S_k die Partialsumme

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^n F(2n+1)/F(n^2)\,F((n+1)^2).$$

Man verwende nun die bekannte Gleichung

$$(-1)^m F(j) = F(m-1)\,F(m+j) - F(m)\,F(m+j-1)$$

und setze $j = 2n+1$, $m = n^2$. Damit erhält man

$$(-1)^n F(2n+1) = F(n^2-1)\,F((n+1)^2) - F(n^2)\,F((n+1)^2-1)$$

und folglich

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{F(n^2-1)}{F(n^2)} - \frac{F((n+1)^2-1)}{F((n+1)^2)}\right] = -\frac{F((k+1)^2-1)}{F((k+1)^2)}.$$

Schliesslich haben wir

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = -\lim_{k\to\infty} \frac{F((k+1)^2-1)}{F((k+1)^2)} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

der Grenzwert ergibt sich aus einer bekannten Eigenschaft der Fibonaccizahlen.

K. Dilcher, Halifax, CD

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), P. Sakmann (Bern, Teillösung), H.-J. Seiffert (Berlin (W)), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), H. Widmer (Rieden).

Aufgabe 948. Es sei $F \in C^1[0,\infty)$, $F(0) = 1$, $F'(x) > 0$ für $x \in [0,\infty)$. Man zeige, dass die Funktionalgleichung

$$F(x f(x)) = \frac{f(x)+x}{f(x)-x}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $f \in C^1(0,\infty)$ besitzt, und ermittle $\lim_{x\to 0} f(x)$.

P. Meier, Basel

Solution

From the given conditions it follows that $F(z) > 1$ $(0 < z < \infty)$, so that the equation

$$F(z) = \frac{z/x + x}{z/x - x} \tag{*}$$

has the unique positive solution g defined by

$$x = g(z) := \left\{ \frac{z(F(z)-1)}{F(z)+1} \right\}^{1/2} \qquad (0 < z < \infty).$$

Again by the given conditions, g is continuously differentiable, i.e. $g \in C^1(0, \infty)$, and we observe that $\lim\limits_{z \downarrow 0} g(z) = 0$.

By logarithmic differentiation we get

$$2 \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{F(z) - 1 + z F'(z)}{z(F(z)-1)} - \frac{F'(z)}{F(z)+1} = \frac{F^2(z) - 1 + 2z F'(z)}{z^2(F^2(z)-1)},$$

which, by the given conditions, is positive $(0 < z < \infty)$.

Hence $g'(z) > 0$ $(0 < z < \infty)$ and therefore g has a continuously differentiable inverse h. Because $\lim\limits_{z \downarrow 0} g(z) = 0$ we find $h \in C^1(0, \infty)$.

The function f defined by $f(x) := \dfrac{h(x)}{x}$ is unique, belongs to $C^1(0, \infty)$ and solves the problem.

Because $\lim\limits_{z \downarrow 0} \dfrac{g(z)}{z} = \{\tfrac{1}{2} F'(0)\}^{1/2}$ we obtain

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{z \downarrow 0} \frac{z}{g(z)} = \left\{ \frac{2}{F'(0)} \right\}^{1/2}.$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), M. Hübner (Leipzig, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), P. Streckeisen (Zürich).

Aufgabe 949. In terms of the basic (or q-) number $[\lambda]$ and basic (or q-) factorial $[n]!$ defined by

$$[\lambda] = \frac{1 - q^\lambda}{1 - q}; \quad [n]! = [1][2][3] \ldots [n], \ [0]! = 1, \tag{1}$$

let the basic (or q-) binomial coefficient be given by

$$\begin{bmatrix}\lambda\\0\end{bmatrix}=1\,,\quad \begin{bmatrix}\lambda\\n\end{bmatrix}=\frac{[\lambda][\lambda-1]\dots[\lambda-n+1]}{[n]!}\,,\qquad n=1,2,3,\dots, \tag{2}$$

for arbitrary (real or complex) q and λ, $|q|<1$. Also let

$$S_q(\lambda,n;r)=\sum_{i=0}^{n}\left\{\begin{bmatrix}\lambda+i\\i\end{bmatrix}r^{-i}-(r-q^{\lambda+1})\begin{bmatrix}\lambda+i+1\\i\end{bmatrix}r^{-i-1}\right\}, \tag{3}$$

where r is a nonzero constant.

Show that

$$S_q(\lambda,n;r)=\frac{q^{\lambda+1}}{r^{n+1}}\begin{bmatrix}\lambda+n+1\\n\end{bmatrix},\qquad n=0,1,2,\dots. \tag{4}$$

H. M. Srivastava, Victoria, CD

Lösung. Mit Hilfe der Definitionen (1) und (2) verifiziert man leicht die Relation

$$q^i\begin{bmatrix}\mu+1\\i+1\end{bmatrix}=q^i\begin{bmatrix}\mu\\i+1\end{bmatrix}+q^\mu\begin{bmatrix}\mu\\i\end{bmatrix}\qquad \text{für } i=0,1,2,\dots \tag{5}$$

(4) gilt trivialerweise für $n=0$; für $n\geqq 1$ teleskopieren wir:

$$S_q(\lambda,n;r)=\begin{bmatrix}\lambda\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda+1\\0\end{bmatrix}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{r^{i+1}}\left\{q^{\lambda+1}\begin{bmatrix}\lambda+i+1\\i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda+i+1\\i+1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda+i+2\\i+1\end{bmatrix}\right\}$$
$$+\frac{q^{\lambda+1}}{r^{n+1}}\begin{bmatrix}\lambda+n+1\\n\end{bmatrix}=\frac{q^{\lambda+1}}{r^{n+1}}\begin{bmatrix}\lambda+n+1\\n\end{bmatrix},$$

da der Term in der geschweiften Klammer nach (5) verschwindet.

J. Binz, Bolligen

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), J. Fehér (Pécs, Ungarn), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), P. Paule (Linz, A).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bs *10. April 1988* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 969. Für reelles $r > 2$ bezeichne c_r die grösste der reellen Zahlen c derart, dass für alle reellen a, b mit $a > b > 0$ die Ungleichung

$$\sqrt{ab}\left(1 + c\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^r\right) \leqq \frac{a+b}{2}$$

gilt. Man bestimme c_r.

H.-J. Seiffert, Berlin (W)

Aufgabe 970. Die Polynomfolge (P_n) sei rekursiv definiert durch

$$P_0 = 1\,, \quad P_{n+1}(z) = z\,(P_n(z) + P'(z))\,, \quad z \in \mathbb{C}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Man gebe $P_n(z)$ in geschlossener Form an und zeige, dass alle Nullstellen von P_n reell und nicht positiv sind.

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Aufgabe 971. $\bar{\mathbb{Q}}$ bezeichne den Körper aller komplexen algebraischen Zahlen, $\bar{\mathbb{Q}}^* := \bar{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$. Seien nun $p_0, \ldots, p_n \in \bar{\mathbb{Q}}$, $p_n \neq 0$ und u eine nichttriviale Lösung der Differentialgleichung

$$p_0\, u^{(n)} + \ldots + p_n\, u = 0\,.$$

Seien weiter $u(0), \ldots, u^{(n-1)}(0), \alpha \in \bar{\mathbb{Q}}, \alpha \neq 0$. Man zeige für alle $j = 0, 1, \ldots$:

(1) $u^{(j)}(\alpha) \notin \bar{\mathbb{Q}}^*$

(2) $u^{(j)}(\alpha) \notin \bar{\mathbb{Q}}$, falls überdies $p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$.

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. R. Murty and V. K. Murty: Irrational numbers araising from certain differential equations. Canad. Math. Bull. *20* (1), 117–120 (1977).
2 I. Niven: Irrational numbers. Carus Math. Monographs 11, J. Wiley & Sons, 1956.
3 A. J. van der Poorten: Some determinants that should be better known. J. Austral. Math. Soc. Ser. A *21*, 278–288 (1976).

P. Bundschuh, Köln, BRD

Aufgabe 972. Für natürliche Zahlen n beweise man

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} < (1+1/n)^{n/2}.$$

P. Ivady, Budapest, Ungarn

Berichtigung

Der erste Literaturhinweis zur Note

Tsinstifas, G. A.: The inscribed simplex in a centrally symmetric convex body in E^n. El. Math. Vol. 42/Nr. 4, Seite 108

ist unvollständig. Er muss wie folgt lauten

[1] I. M. Yaglom and V. G. Boltyanskii: Convex Figures. Holt, Renehard and Winston, New York, 1961.

Literaturübersicht

St. Ulam: Science, Computers & People: From the Tree of Mathematics. XXI und 264 Seiten. Fr. 78.–. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1986.

Stanislaw Ulam, der 1984 verstorbene polnische Mathematiker, galt als ein ganz besonders origineller und vielseitiger Mathematiker. Man kann sich davon in seiner Autobiographie «Adventures of a Mathematician» Rechenschaft geben oder eben bei Durchsicht des vorliegenden Bandes, der 23 Aufsätze aus der Feder Ulams enthält. Sie alle sind schon früher, zu den verschiedensten Zeiten, erschienen und wurden hier nur gesammelt und neu gedruckt. Es ist ein kleiner Nachteil des Bandes, dass die Reihenfolge der Aufsätze nicht chronologisch ist und dass überhaupt bei keinem der 23 Beiträge ein Jahrgang oder ein Quellennachweis zu finden ist. Man findet sie im Vorwort säuberlich zusammengestellt und das ist wichtig, da man sonst die verblüffenden Zukunfsvisionen von Ulams Geist nicht würdigen kann. So erschien zum Beispiel der Aufsatz «Computations in Parallel», der sich anscheinend auf ein heute enorm aktuelles Forschungsgebiet bezieht, in Wirklichkeit 1957 und die beiden gleich anschliessenden Arbeiten über zellulare Automaten tönen wie ein Forschungsbericht aus dem Jahre 1985, obwohl sie bereits 1962 und 1970 verfasst wurden.

Physik, Computer und Biomathematik sind die Hauptthemen der verschiedenen Arbeiten, die alle in leicht lesbarem Englisch geschrieben sind, also nicht eigentliche Facharbeiten sind. Besonders faszinierend sind biographische Aufsätze, meist Nachrufe, da Ulam die betreffenden Mathematiker oder Physiker selber sehr gut kannte. Kernstück des Buchs ist Ulams Nachruf und weitere Betrachtungen zu John von Neumann, des nach Hilbert wohl bedeutendsten Mathematikers unseres Jahrhunderts.

Man sollte das Buch nicht in einem Zuge lesen, sondern immer wieder den einen oder andern Aufsatz vornehmen. Dann wird die Reichhaltigkeit des Gedankenguts Ulams ganz besonders schön hervortreten.

P. Wilker

Macdonald, I. D.: ALEX – a 1-act play about Euclid. 32 Seiten, US-$ 3.95. Polygonal Publishing House, Washington, NJ, 1985.

Es ist nicht leicht, sich eine Meinung über diesen Einakter des bekannten englischen Algebraikers Macdonald zu bilden. Deshalb gab der Referent das Büchlein einer Bekannten, Schriftstellerin und mathematisch gänzlich Unbefangenen, zu lesen. Hier ihr Bericht: