

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 42 (1987)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Über Konstruktionen mit Zirkel, Lineal und Winkelteilungen  
**Autor:** Halter-Koch, Franz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-40042>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Vol. 42

Nr. 6

Seiten 147–178

Basel, November 1987

## Über Konstruktionen mit Zirkel, Lineal und Winkelteilungen

1. Bekanntlich ist die Dreiteilung des Winkels «im allgemeinen» nicht mit Zirkel und Lineal durchführbar; sie führt auf eine sogenannte Konstruktionsaufgabe dritten Grades, zu deren Lösung weitere Instrumente erforderlich sind, etwa das Einschublineal oder der Zimmermannshaken (siehe [1]). Andererseits weiss man, dass sich eine ganze Reihe von höheren Konstruktionsaufgaben auf die Winkeldreiteilung zurückführen lässt, etwa die Konstruktion des regelmässigen 7- und 13-ecks (siehe [4]), und allgemein alle jenen Aufgaben, welche auf kubische Gleichungen im Casus irreducibilis führen (siehe dazu die trigonometrischen Auflösungsformeln in [5], § 13).

Ziel dieser Note ist eine systematische algebraische Untersuchung der mit Zirkel, Lineal und gewissen Winkelteilungen konstruierbaren Grössen. Ich betrachte dazu die komplexen Zahlen als Ebene, in der die Konstruktionen durchgeführt werden sollen und verwende das in [2], § 4.9 dargestellte Konzept zur Algebraisierung des Begriffs der Konstruierbarkeit. Sei  $\{0, 1\} \subset S \subset \mathbb{C}$  eine Menge von «Grundpunkten» und  $P$  eine Menge von ungeraden Primzahlen (für  $p \in P$  soll die «Winkel- $p$ -teilung» allgemein durchführbar sein). Dann definiere ich wie folgt:

**Definition.** Eine komplexe Zahl  $z$  heisst mit Zirkel, Lineal und Winkel- $p$ -teilung für  $p \in P$  aus  $S$  konstruierbar, wenn es einen Körperturm

$$\mathbb{Q}(S \cup \bar{S}) = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_r \subset \mathbb{C}^1)$$

gibt mit  $r \geq 0$  und  $z \in K_r$ , so dass für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$  gilt:

Entweder  $[K_i : K_{i-1}] = 2$  oder

$$K_i = K_{i-1}(z_i), |z_i| = 1 \quad \text{und} \quad z_i^p \in K_{i-1} \quad \text{mit} \quad p \in P.$$

$C_p(S)$  sei die Menge aller mit Zirkel, Lineal und Winkel- $p$ -teilungen für  $p \in P$  aus  $S$  konstruierbaren Punkte. Im Falle  $P = \{p\}$  sei  $C_p(S) = C_{\{p\}}(S)$ ; im Falle  $P = \emptyset$  ist  $C(S) = C_\emptyset(S)$  die Menge der mit Zirkel und Lineal aus  $S$  konstruierbaren Punkte.

Offensichtlich gilt:

**Satz 1.**  $C_p(S)$  ist der kleinste Teilkörper von  $\mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften:

<sup>1)</sup> Für  $z \in \mathbb{C}$  sei  $\bar{z}$  die dazu konjugiert-komplexe Zahl; für  $M \subset \mathbb{C}$  sei  $\bar{M} = \{\bar{z} \mid z \in M\}$ .

- a)  $\overline{C_P(S)} = C_P(S)$  ;  
 b) aus  $z \in \mathbb{C}$  und  $z^2 \in C_P(S)$  folgt  $z \in C_P(S)$  ;  
 c) aus  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z|=1$ ,  $p \in P$  und  $z^p \in C_P(S)$  folgt  $z \in C_P(S)$  .

**2.** Die Charakterisierung der mit Zirkel, Lineal und gewissen Winkelteilungen konstruierbaren regelmässigen  $n$ -Ecke führt auf eine natürliche Verallgemeinerung des bekannten Gauss'schen Satzes. Ich beginne mit der Konstruierbarkeit zyklischer reeller Erweiterungen von Primzahlgrad  $p$  durch Winkel- $p$ -teilungen.

**Satz 2.** Sei  $p$  eine ungerade Primzahl,  $L/K$  eine zyklische Körpererweiterung mit  $[L:K]=p$  und  $L \subset \mathbb{R}$ ; dann ist  $L \subset C_p(K)$ .

**Beweis.** Sei  $\zeta = e^{2\pi i/p}$ ; dann ist auch  $L(\zeta)/K(\zeta)$  zyklisch, und folglich gibt es ein  $z \in L(\zeta)$  mit  $L(\zeta) = K(\zeta)(z)$  und  $z^p \in K(\zeta)$  [3; ch. VIII, § 6]. Die komplexe Konjugation induziert auf  $L(\zeta)$  den erzeugenden Automorphismus von  $L(\zeta)/L(\zeta + \zeta^{-1})$  und auf  $K(\zeta)$  den von  $K(\zeta)/K(\zeta + \zeta^{-1})$ ; folglich ist  $|z|^2 = z\bar{z} \in L(\zeta + \zeta^{-1})$  und  $|z|^{2p} = z^p \cdot \overline{z^p} \in K(\zeta + \zeta^{-1})$ . Mit  $L/K$  ist auch  $L(\zeta + \zeta^{-1})/K(\zeta + \zeta^{-1})$  zyklisch vom Grade  $p$ , aber wegen  $L(\zeta + \zeta^{-1}) \subset \mathbb{R}$  enthält  $L(\zeta + \zeta^{-1})$  keine primitive  $p$ -te Einheitswurzel.

Daher ist  $|z|^{2p} = b^p$  mit  $b \in K(\zeta + \zeta^{-1})$ , also  $\left| \frac{z}{\sqrt{b}} \right| = 1$ , und der Körperturm

$$K = \mathbb{Q}(K \cup \bar{K}) \subset K(\zeta) \subset K(\zeta, \sqrt{b}) \subset K\left(\zeta, \sqrt{b}, \frac{z}{\sqrt{b}}\right)$$

zeigt wegen  $L \subset K\left(\zeta, \sqrt{b}, \frac{z}{\sqrt{b}}\right)$ , dass  $L \subset C_p(K)$ , wie behauptet, q.e.d.

Unmittelbar folgt nun:

**Korollar 1.** Sei  $P$  eine Menge ungerader Primzahlen und  $L/K$  eine abelsche Körpererweiterung mit  $L \subset \mathbb{R}$  derart, dass in  $[L:K]$  nur Primzahlen aus  $P \cup \{2\}$  aufgehen; dann ist  $L \subset C_P(K)$ .

**Korollar 2.** Sei  $P$  eine Menge ungerader Primzahlen und  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , derart, dass in  $\varphi(n)^2$  nur Primzahlen aus  $P \cup \{2\}$  aufgehen; dann ist  $e^{2\pi i/n} \in C_P(\mathbb{Q}) = C_P(\{0, 1\})$ , d. h., das regelmässige  $n$ -eck ist mit Zirkel, Lineal und Winkel- $p$ -teilungen für  $p \in P$  konstruierbar.

**Beweis.** Sei  $L$  der grösste reelle Teilkörper von  $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ ; dann ist  $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}):L]=2$ , und  $L/\mathbb{Q}$  ist abelsch vom Grade  $\varphi(n)/2$ ; damit folgt  $L \subset C_P(\mathbb{Q})$  nach Korollar 1, also auch  $e^{2\pi i/n} \in C_P(\mathbb{Q})$ , q.e.d.

Die Umkehrung von Korollar 2 ist falsch, da  $e^{2\pi i/p} \in C_P(\mathbb{Q})$  für jedes  $p \in P$ . Jedoch gilt:

**Satz 3.** Sei  $p_0$  eine ungerade Primzahl und  $P$  die Menge aller Primzahlen  $p$  mit  $2 < p < p_0$ ; sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Genau dann ist  $e^{2\pi i/n} \in C_P(\mathbb{Q})$ , wenn in  $\varphi(n)$  nur Primteiler aus  $P \cup \{2\}$  aufgehen.

<sup>2)</sup>  $\varphi$  ist die Euler'sche Funktion.

**Beweis.** Nach Korollar 2 ist nur die Notwendigkeit der Bedingung zu zeigen. Sei also  $e^{2\pi i/n} \in C_p(\mathbb{Q})$  und

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_r \subset \mathbb{C}$$

ein Körperturm gemäss Definition mit  $e^{2\pi i/n} \in K_r$ ; dann ist  $[K_i : K_{i-1}] < p_0$  für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$ , also enthält  $[K_r : \mathbb{Q}]$  nur Primteiler aus  $P \cup \{2\}$ . Andererseits ist aber  $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n) \mid [K_r : \mathbb{Q}]$ , also enthält  $\varphi(n)$  nur Primteiler aus  $P \cup \{2\}$ , q.e.d.

3. Satz 2 beinhaltet (für  $p = 3$ ) die bekannte Tatsache, dass sich die Konstruktion totalreeller kubischer Irrationalitäten auf die Winkeldreiteilung zurückführen lässt. Dass aber andererseits die Konstruktion einfach-reeller kubischer Irrationalitäten und insbesondere die Kubusvervielfachung nicht auf die Winkeldreiteilung zurückgeführt werden kann, ist Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 4.** Sei  $p$  eine ungerade Primzahl,  $\{0, 1\} \subset S \subset \mathbb{C}$ ,  $z \in C_p(S) \cap \mathbb{R}$  und  $z^p \in C(S)$ . Dann ist bereits  $z \in C(S)$ .

**Beweis.** Wegen  $C_p(S) = C_p(C(S))$  gibt es einen Körperturm

$$C(S) = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_r \subset \mathbb{C}$$

mit  $z \in K_r$  gemäss Definition. Sei  $s \in \{0, \dots, r\}$  minimal derart, dass es ein  $z_0 \in K_s$  gibt mit  $z_0^p = z^p$ .

*Fall 1:*  $s = 0$ . Wegen  $z_0 \in K_0 = C(S)$  ist auch  $|z_0| \in C(S)$ , also  $z = \pm |z| = \pm |z_0| \in C(S)$ , was zu beweisen war.

*Fall 2:*  $s \geq 1$ . Wegen  $z_0 \notin K_{s-1}$  ist  $K_s = K_{s-1}(z_0)$ ,  $z_0^p = z^p \in C(S) \subset K_{s-1}$ , und wegen der Minimalität von  $s$  ist  $z_0^p \notin K_{s-1}^p$ , also  $[K_s : K_{s-1}] = p$  [3; ch. VIII, § 9]. Andererseits ist aber  $K_s = K_{s-1}(z_s)$  mit  $z_s \in \mathbb{C}$ ,  $|z_s| = 1$ , und nach [6; Corollary p. 163] gibt es ein  $j \in \{1, \dots, p-1\}$  und  $b \in K_{s-1}$  mit  $z_0 = z_s^j b$ ; daraus folgt  $z^2 = |z|^2 = |z_0|^2 = b\bar{b} \in K_{s-1} \cdot \overline{K_{s-1}}$ , also  $K_{s-1}(z^2) \subset K_{s-1} \overline{K_{s-1}}$ . Wegen  $z^p \in C(S)$  und der Minimalität von  $s$  folgt  $[K_{s-1}(z) : K_{s-1}] = p$ , also  $K_{s-1}(z^2) = K_{s-1}(z)$  und

$$p \mid [K_{s-1} \overline{K_{s-1}} : K_{s-1}].$$

Nun ist aber  $[K_{s-1} \overline{K_{s-1}} : K_{s-1}] = \prod_{i=1}^{s-1} [K_{s-1} \overline{K_i} : K_{s-1} \overline{K_{i-1}}]$ ; ist nun  $[K_i : K_{i-1}] = 2$ , so

folgt  $[\overline{K_i} : \overline{K_{i-1}}] = 2$  und  $[K_{s-1} \overline{K_i} : K_{s-1} \overline{K_{i-1}}] \leq 2$ . Ist  $[K_i : K_{i-1}] > 2$ , so ist nach Definition  $K_i = K_{i-1}(z_i)$  mit  $|z_i| = 1$ ,  $z_i^p \in K_{i-1}$ , also  $\overline{K_i} = \overline{K_{i-1}}(\bar{z}_i) \overline{K_{i-1} K_{s-1}}$ , da  $\bar{z}_i = 1/z_i \in K_i K_{s-1}$ ; daraus folgt aber  $K_{s-1} \overline{K_i} = K_{s-1} \overline{K_{i-1}}$ ; also ist  $[K_{s-1} \overline{K_{s-1}} : K_{s-1}]$

$$= \prod_{i=1}^{s-1} [K_{s-1} \overline{K_i} : K_{s-1} \overline{K_{i-1}}] \text{ eine 2-Potenz im Widerspruch zu } p \mid [K_{s-1} \overline{K_{s-1}} : K_{s-1}],$$

q.e.d.

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L. Bieberbach: Theorie der geometrischen Konstruktionen. Birkhäuser, Basel 1952.
- 2 G. Fischer, R. Sacher: Einführung in die Algebra. Teubner, Stuttgart 1978.
- 3 S. Lang: Algebra. Addison-Wesley, 1967.
- 4 H. Lebesgue: Leçons sur les constructions géométriques. Gauthier-Villars, Paris 1950.
- 5 O. Perron: Algebra II. Göschen, Berlin 1951.
- 6 A. Schinzel: On linear dependence of roots. Acta Arithmetica (1975) 28, 161–175.

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/060000-00\$1.50+0.20/0

## A generalization of a two triangle inequality

### 1. Introduction

By coupling an inequality of Bottema [1] together with one of Pedoe [1], O. Bottema and M. S. Klamkin obtained the two chain inequality

$$a'x + b'y + c'z \cong \left[ \frac{P}{2} + 8FF' \right]^{1/2} \cong 4\sqrt{FF'},$$

see [2], where  $P = \sum a'^2(b^2 + c^2 - a^2)$ ,  $x, y, z$  the distances of an interior point  $M$  of the triangle  $ABC$  from the vertices  $A, B, C$ ,  $a, b, c$  and  $a', b', c'$  the sides of the triangles  $ABC$  and  $A'B'C'$  and  $F, F'$  their area respectively.

In this note the author will generalize the part

$$a'x + b'y + c'z \cong 4\sqrt{FF'}$$

of the above inequality for two simplices  $s^{(n)} = (A_1 A_2 \dots A_{n+1})$  and  $s'^{(n)} = (A'_1 A'_2 \dots A'_{n+1})$ .

### 2. Notations

We denote by  $V(W)$  the volume of the simplex  $W$ ,  $s^{(n)} = (A_1 A_2 \dots A_{n+1})$ ,  $s'^{(n)} = (A'_1 A'_2 \dots A'_{n+1})$  two simplices of  $E^n$ . The facets

$$(A_1 A_2 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_{n+1}), (A'_1 A'_2 \dots A'_{i-1} A'_{i+1} \dots A'_{n+1})$$

will be denoted by  $s_i^{(n-1)}$ ,  $s'_i{}^{(n-1)}$  respectively.

Suppose that  $M$  is an interior point of the simplex  $s^{(n)}$  with distances  $A_i M = x_i$ . We put:

$$D = \sum_{i=1}^{n+1} x_i V(s'_i{}^{(n-1)}).$$