Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1987)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

wobei jetzt deren *Reihenfolge mitberücksichtigt* wird. So sind jetzt etwa $2+3+0+5$ und $3+5+0+2$ zwei verschiedene Zerfällungen der Zahl 10. Additive Zerfällungen unter Berücksichtigung der Summanden-Reihenfolge werden in der Kombinatorik als *Kompositionen* bezeichnet.

M. Jeger, Mathematik-Departement ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. E. Andrews: The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 2. London-Amsterdam-Don Mills-Sydney-Tokyo 1976.
[2] L. Comtet: Advanced Combinatorics. Dordrecht 1974.
[3] G. H. Hardy and E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers. New York 1960[4].
[4] M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Bd. 2. Stuttgart 1976.
[5] D. E. Knuth: The Art of Computer Programming, Vol. 1 (Fundamental Algorithms). Menlo Park-London-Amsterdam-Don Mills-Sydney 1968.
[6] E. Netto: Lehrbuch der Combinatorik. Leipzig 1901.
[7] A. Nijenhuis and H. S. Wilf: Combinatorial Algorithms. New York 1975.
[8] D. Stanton and D. White: Constructive Combinatorics. New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1986.

ANMERKUNGEN

[1*] Vgl. L. Euler: Opera Omnia I,8. Leipzig-Berlin 1922.
[2*] Vgl. [6], p. 147 ff.
[3*] Vgl. etwa [4], p. 11 ff.
[4*] Vgl. [4], p. 104/105.
[5*] SIMONS-BASIC ist eine auf den Rechner Commodore C-64 zugeschnittene BASIC-Erweiterung, die ein strukturiertes Programmieren erlaubt. Diese BASIC-Version bietet zudem direkte Befehle für die Graphik-Programmierung an.
[6*] Vgl. [4], p. 14 ff.
[7*] Vgl. [4], p. 119–122 oder auch [3].

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/87/060000-00$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 950. Man bestimme den kleinsten Wert, den der Durchmesser (d. i. der maximale Abstand von zwei Punkten) einer ebenen nichtkollinearen Menge von vier Punkten mit paarweise ganzzahligen Abständen annehmen kann.

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Lösung: Der gesuchte kleinste Wert ist 4. Tatsächlich haben beide Diagonalen des gleichschenkligen Trapezes mit Länge 3 bzw. 4 der parallelen Seiten sowie Schenkellänge 2 die Länge 4, womit der Durchmesser dieses Trapezes gleich 4 ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es ebene nichtkollineare Mengen von vier verschiedenen Punkten mit paarweise ganzzahligen Abständen und Durchmesser $d \in \{1, 2, 3\}$ nicht gibt. Dazu kann man wie folgt vorgehen: Bei festem $d \in \{1, 2, 3\}$ betrachtet man in einem kartesischen Koordinatensystem die Kreise $x^2 + y^2 = s^2$ bzw. $(x-d)^2 + y^2 = t^2$ mit $s, t \in \{1, \ldots, d\}$ um die Punkte $(0, 0)$ bzw. $(d, 0)$. Diese Kreise schneiden sich dann und nur dann, wenn $D_d(s,t) := (d^2 + s^2 + t^2)^2 - 2(d^4 + s^4 + t^4)$ nichtnegativ ist; als Schnittpunkte ergeben sich dann die Punkte $\frac{1}{2d}(d^2 + s^2 - t^2, \sqrt{D_d(s,t)})$, für deren Anzahl $A(d) = 2, 7, 14$ bei $d = 1, 2, 3$ gilt. Bei $d = 1$ sind $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ die beiden Schnittpunkte und da diese voneinander den irrationalen Abstand $\sqrt{3}$ haben, ist der gesuchte kleinste Wert mindestens 2. Bei $d = 2$ bzw. $d = 3$ entnimmt man die sich ergebenden Schnittpunkte den folgenden Tabellen:

$s \backslash t$	1	2
1	$(1, 0)$	$\left(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$
2	$\left(\frac{7}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$	$(1, \pm\sqrt{3})$

$s \backslash t$	1	2	3
1	–	$(1, 0)$	$\left(\frac{1}{6}, \pm\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$
2	$(2, 0)$	$\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$
3	$\left(\frac{17}{6}, \pm\frac{\sqrt{35}}{6}\right)$	$\left(\frac{7}{3}, \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Nun prüft man leicht, dass in der ersten Tabelle keine zwei der sieben Punkte ganzzahligen Abstand haben. In der zweiten Tabelle haben genau die Punkte $(1, 0)$ und $(2, 0)$ einen ganzzahligen Abstand voneinander, führen aber – zusammen mit $(0, 0)$ und $(3, 0)$ zu einer Konfiguration mit vier kollinearen Punkten.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Aufgabe 951. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$ bestimme man die Anzahl reeller Lösungen der Gleichung

$$(x+1)^x + (x+2)^x + \ldots + (x+n)^x = (x+n+1)^x .$$

L. Kuipers, Sierre

Lösung: Die gegebene Gleichung hat für jedes n genau eine Lösung.

Beweis: Offenbar sind die auftretenden Potenzen nur definiert für reelle $x > -1$ und ganzzahlige $x < -n-1$.

a) Für $x > -1$ lässt sich die Gleichung schreiben in der Form

$$F_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{x+n+1}\right)^x = 1 .$$

Da die stetigen Funktionen $\left(1-\frac{k}{x+n+1}\right)^x$ $(k=1,\ldots,n)$ für $x>-1$ monoton fallen und überdies

$$F_n(x)\to\infty \text{ für } x\downarrow -1 \text{ und } \lim_{x\to\infty} F_n(x)=\sum_1^n e^{-k}<\frac{1}{e-1}<1\,,$$

gibt es genau einen Wert x wofür $F_n(x)=1$.

b) Für ganzes $x<-n-1$ definieren wir $x:=-n-m-1$ $(m\geqq 1$, ganz). Die resultierende Gleichung hat die Form

$$G_n(m):=\sum_{k=1}^n (m+k)^{-n-m-1}=m^{-n-m-1}\,.$$

Weil die Funktion $(m+t)^{-n-m-1}$ für $t\geqq 0$ monoton fallend ist hat man

$$G_n(m)<\int_{t=0}^n (m+t)^{-n-m-1}\,dt<\frac{1}{n+m}\,m^{-n-m}<m^{-n-m-1}\,.$$

Es gibt also keine Lösung $x<-n-1$, was zu beweisen war.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundtschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), Chr. A. Meyer (Bern), A. Witkowski (Wrokław, Polen).

Bemerkung der Redaktion: Nur Lossers diskutiert auch den Fall $x\in\mathbb{Z}$, $x>-n-1$.

Aufgabe 952. Man beweise:

$$\int_0^u \frac{(\sin x)^2}{x}\,dx\int_0^u \frac{\sin x}{x}\,dx<2\int_0^u\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx\,,\quad 0<u\leqq\pi\,.$$

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Lösung: $f(x)=x^{-1}\sin x$ und $g(x)=x^{-1}$ sind beide streng monoton fallend auf $(0,u)$. Wegen $\sin x>0$ gilt folglich

$$0<\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin y}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\sin x\sin y$$

f.a. $x,y\in(0,u)^2$ mit $x\neq y$. Ausmultiplizieren und anschliessende Integration über $[0,u]^2$ liefern fast unmittelbar

$$\int_0^u \frac{(\sin x)^2}{x}\,dx\int_0^u \frac{\sin x}{x}\,dx<(1-\cos u)\int_0^u\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx\,. \qquad (*)$$

Für $u<\pi$ ist (*) schärfer als die behauptete Ungleichung.

H.-J. Seiffert, Berlin (W)

Weitere Lösungen sandten A. Bege (Cluj, Rumänien), P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), M. Vowe (Therwil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1988* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 973. D, E, F seien die Ecken eines dem Dreieck ABC einbeschriebenen Dreiecks, wobei $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$. Die Inhalte der Dreiecke DEF, AEF, BFD, CDE seien mit S, S_1, S_2, S_3 bezeichnet. Nach P. Erdös und H. Debrunner gilt dann

$$S \geqq \min(S_1, S_2, S_3)\,.$$

Man beweise oder widerlege folgende mögliche Verschärfungen dieser Ungleichung:

a) $S \geqq H(S_1, S_2, S_3)$ b) $S \geqq G(S_1, S_2, S_3)$.

Dabei bezeichnen H das harmonische, G das geometrische Mittel.

LITERATURVERZEICHNIS

1 Aufgabe 260, El. Math. *11* (1956), 20.
2 O. Bottema et al., Geometric inequalities, Groningen 1969, p. 80.

D. P. Mavlo, Moskau, UdSSR

Aufgabe 974. Es bezeichne $g(r, n, k)$ die maximale Anzahl von r-dimensionalen Gebieten, in die der r-dimensionale Raum durch n Büschel zu je k parallelen $(r-1)$-dimensionalen Hyperebenen zerlegt wird. Man bestimme $g(r, n, k)$.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 975. Man ermittle die Anzahl $t(m, n)$ aller Polynome n-ten Grades in einer Unbestimmten mit teilerfremden Koeffizienten aus $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$.

R. Wyss, Flumenthal

Aufgabe 976. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $k(n)$ den maximalen quadratfreien Teiler (quadratfreien Kern) von n. Ferner sei

$$\alpha := \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right).$$

Man beweise

$$\sum_{n \leqq x} k(n/k(n)) = (3\alpha/\pi^2)\, x \ln x + O(x).$$

A. Bege, Cluj, Rumänien

Berichtigung

Die Aufgabe 967 in Heft 4, p. 113 ist wie folgt zu korrigieren:

Aufgabe 967: Auf der Parabel p: $y = x^2$ liegen im allgemeinen zwei Punkte $S_{1,2}$ mit der Eigenschaft, dass die Spiegelbilder $p^*_{1,2}$ von p bezüglich $S_{1,2}$ durch einen vorgegebenen Punkt P verlaufen. Bestimme zu variablem $P \in \bar{p}$: $y^2 = x$ die Enveloppe der Schar der gemeinsamen Tangenten von p^*_1 und p^*_2.

Literaturüberschau

P. J. Ryan: Euclidean and Non-Euclidean Geometry. An analytic approach. XVII und 215 Seiten, US-$ 42.50/14.95 (P/b) und £ 27.50/9.95 (P/b). Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney 1986.

Der Autor gibt einen ausführlichen analytischen Zugang zur euklidischen Geometrie der Ebene, zur sphärischen Geometrie, zur projektiven Ebene und schliesslich zur hyperbolischen Geometrie, wobei er gelegentlich auch auf die synthetische Beweisführung zurückgreift. Für Leser ohne Vorkenntnisse ist diese Einführung sehr formalistisch und wohl zu wenig auf die Anschauung bezogen, obwohl derText auf weite Strecken von Skizzen begleitet ist. Bei den Figuren zur sphärischen Geometrie sind dabei verschiedene „Todsünden" der Kugeldarstellung anzutreffen: Ellipsen mit Spitzen an den spitzen Scheiteln, falsch eingezeichnete Pole von Grosskreisen. Das Buch ist zu empfehlen für Studierende oder Lehrer, welche parallel zur synthetischen Geometrie eine exemplarische analytische Darstellung kennenlernen möchten. H. Walser

D. Stanton und D. White: Constructive Combinatorics. Undergraduate Texts in Mathematics. X und 183 Seiten, 73 Figuren, DM 48.–. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1986.

Der Titel dieses Buches aus der UTM-Reihe ist wörtlich zu nehmen, werden doch verschiedene kombinatorische Probleme algorithmisch-konstruktiv gelöst. Im ersten Kapitel werden an ausgewählten Beispielen die Algorithmen zur Auflistung aller kombinatorischer Figuren beschrieben. Zu diesen Beispielen werden im zweiten Kapitel teilweise geordnete Mengen (posets) beschrieben und betrachtet. Im dritten Kapitel wird die Aequivalenz kombinatorischer Problemstellungen anhand von Bijektionen gezeigt. Schliesslich werden im vierten Kapitel Bijektionen zu Involutionen erweitert.