

# Eine einfache Konstruktion von Punkten und Tangenten der Ellipse

Autor(en): **Strubecker, Karl**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 1

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40797>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Didaktik und Elementarmathematik

## Eine einfache Konstruktion von Punkten und Tangenten der Ellipse

Bei der Darstellung eines Kreises  $k^*$  in allgemeiner Lage durch Parallelprojektion auf eine Ebene  $\pi$  erhält man in der Regel für die Bildellipse  $k$  von  $k^*$  einen Durchmesser  $[T_1T_2]$  von  $k$  mit den beiden parallelen Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  in den Ellipsenpunkten  $T_1$  und  $T_2$  sowie einen allgemeinen Punkt  $P$  von  $k$ . Um dann sofort (ohne Ermittlung der beiden Hauptachsen der Ellipse) beliebig viele weitere Punkte  $X$  des Ellipsenbogens  $(T_1PT_2)$  und ihre Tangenten zu konstruieren, kann man den in Figur 1 eingezeichneten, besonders einfachen Weg einschlagen:

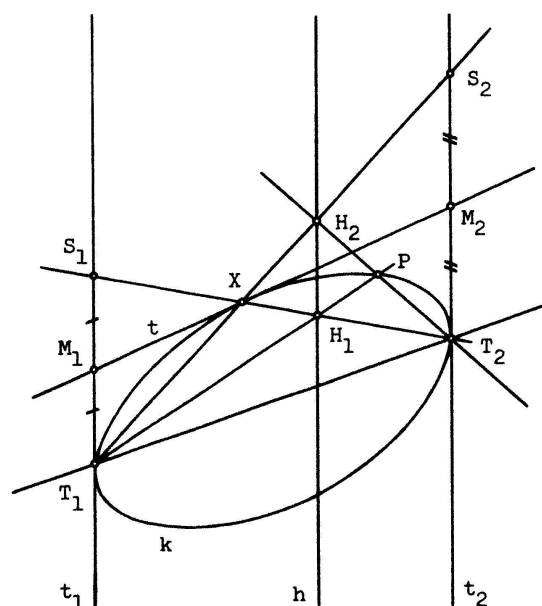
Man zeichne zwischen  $t_1$  und  $t_2$  eine beliebige dazu parallele *Hilfsgerade*  $h$ . Die Strahlen  $[T_1P]$  und  $[T_2P]$  schneiden die Hilfsgerade  $h$  in Punkten  $H_1$  und  $H_2$ . Die beiden Verbindungsgeraden  $[T_1H_2]$  und  $[T_2H_1]$  schneiden sich dann in einem Punkte  $X$  des Ellipsenbogens  $(T_1PT_2)$ . Durch verschiedene Wahl der Hilfsgeraden  $h$  kann man so beliebig viele Punkte  $X$  der Ellipse  $k$  erhalten.

Sind weiter  $S_1$  und  $S_2$  die Schnittpunkte der Geraden  $[T_2H_1]$  und  $[T_1H_2]$  mit den Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  und sind  $M_1$  und  $M_2$  die Mittelpunkte der Strecken  $T_1S_1$  und  $T_2S_2$ , dann liegen die drei Punkte  $M_1$ ,  $X$ ,  $M_2$  auf einer Geraden  $t$ , welche die *Tangente* der Ellipse  $k$  im Punkte  $X$  ist [1\*].

Weil das Halbieren einer Strecke (Stechzirkel!) einfacher und genauer ist als das Halbieren eines Winkels, ist damit auch eine besonders einfache und genaue Konstruktion der Ellipsentangenten in den Punkten  $X$  gewonnen.

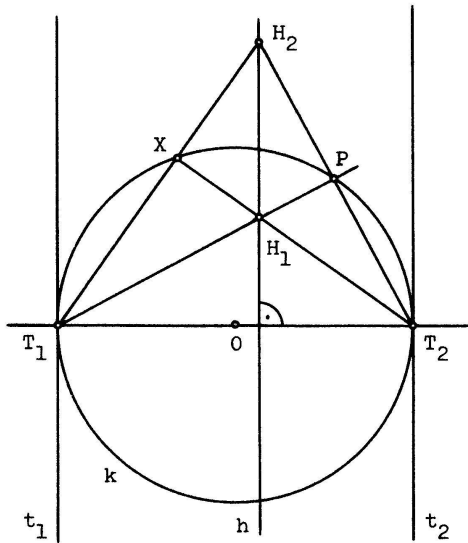
Weil die angegebenen Konstruktionen für Punkte und Tangenten einer Ellipse *affin invariant* sind, genügt es, ihre Richtigkeit für einen Kreis  $k$  zu beweisen.

Zum *Beweis* seien also  $t_1$  und  $t_2$  zwei parallele Tangenten des Kreises  $k$  in den (diametralen) Punkten  $T_1$  und  $T_2$ , ferner  $P$  ein fester Punkt von  $k$  (Figur 2). Ist dann  $h$

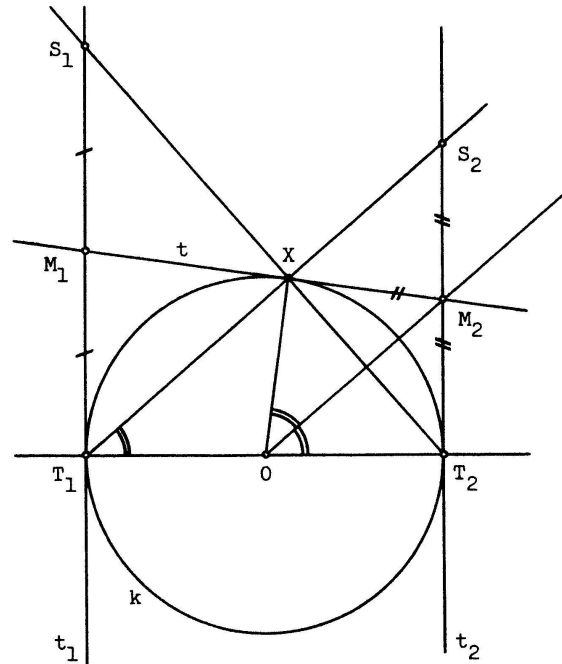


Figur 1.

eine beliebige Parallele zu  $t_1$  und  $t_2$ , dann liefert unsere Konstruktion als Schnittpunkt  $X$  der beiden Geraden  $[T_1H_2]$  und  $[T_2H_1]$  einen Punkt  $X$ , von dem nun zu zeigen ist, dass er auf dem Kreis  $k$  liegt. Weil nun  $h$  auf dem Kreisdurchmesser  $[T_1T_2]$  normal steht und weil nach dem Satz von Thales auch die beiden Geraden  $[T_1P]$  und  $[T_2P]$  zueinander normal sind, ist der Schnittpunkt  $H_1$  von  $h$  mit der Geraden  $[T_1P]$  der Höhengschnittpunkt des Dreiecks  $(T_1T_2H_2)$ ; analog ist der Schnittpunkt  $H_2$  von  $h$  mit der Geraden  $[T_2P]$  der Höhengschnittpunkt des Dreiecks  $(T_1T_2H_1)$ . Daher sind auch die beiden Geraden  $[T_1H_2]$  und  $[T_2H_1]$  zueinander normal und ihr Schnittpunkt  $X$  liegt folglich nach dem Satz von Thales auf dem Kreis  $k$ , was zu beweisen war.



Figur 2.



Figur 3.

Die Richtigkeit der *Tangentenkonstruktion* folgt bei dem Kreis  $k$  sofort aus dem Peripherie- und Zentriwinkelsatz (Figur 3). Die Tangente  $t$  des Kreises  $k$  im Punkte  $X$  schneidet die Tangente  $t_2$  von  $T_2$  in einem Punkte  $M_2$ , für den  $M_2X = M_2T_2$  gilt. Daher liegt  $M_2$  auf der Halbierenden des Winkels  $T_2OX$ . Somit sind die Geraden  $[OM_2]$  und  $[T_1X]$  zueinander parallel. Schneidet dann die Gerade  $[T_1X]$  die Tangente  $t_2$  von  $T_2$  im Punkte  $S_2$ , so folgt aus dem Strahlensatz, weil  $O$  Mittelpunkt der Strecke  $T_1T_2$  ist, dass auch der Punkt  $M_2$  Mittelpunkt der Strecke  $T_2S_2$  ist. Die Tangente  $t$  des Kreises  $k$  im Punkte  $X$  enthält also tatsächlich den Mittelpunkt  $M_2$  der Strecke  $T_2S_2$ . Schneidet weiter die Tangente  $t_1$  von  $T_1$  die Gerade  $[T_2X]$  im Punkte  $S_1$ , so liegt aus demselben Grunde auch der Mittelpunkt  $M_1$  der Strecke  $T_1S_1$  auf der Tangente  $t$  des Kreises  $k$  im Punkte  $X$ . Die Tangente  $t$  von  $X$  ist also die Verbindungsgerade der Punkte  $M_1$  und  $M_2$ , was zu beweisen war.

Karl Strubecker, Universität Karlsruhe

ANMERKUNG

[1\*] Ich habe diese einfache Tangentenkonstruktion der Ellipse (die sinngemäß auch für die Hyperbel und Parabel gilt) schon in dem Buche «Vorlesungen über Darstellende Geometrie» (Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 2. Auflage 1960) mitgeteilt.