Eine einfache Konstruktion von Punkten und Tangenten der Ellipse

Autor(en): **Strubecker, Karl**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 1

PDF erstellt am: **05.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40797

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Didaktik und Elementarmathematik

Eine einfache Konstruktion von Punkten und Tangenten der Ellipse

Bei der Darstellung eines Kreises k^* in allgemeiner Lage durch Parallelprojektion auf eine Ebene π erhält man in der Regel für die Bildellipse k von k^* einen Durchmesser $[T_1 T_2]$ von k mit den beiden parallelen Tangenten t_1 und t_2 in den Ellipsenpunkten T_1 und T_2 sowie einen allgemeinen Punkt P von k. Um dann sofort (ohne Ermittlung der beiden Hauptachsen der Ellipse) beliebig viele weitere Punkte X des Ellipsenbogens $(T_1 P T_2)$ und ihre Tangenten zu konstruieren, kann man den in Figur 1 eingezeichneten, besonders einfachen Weg einschlagen:

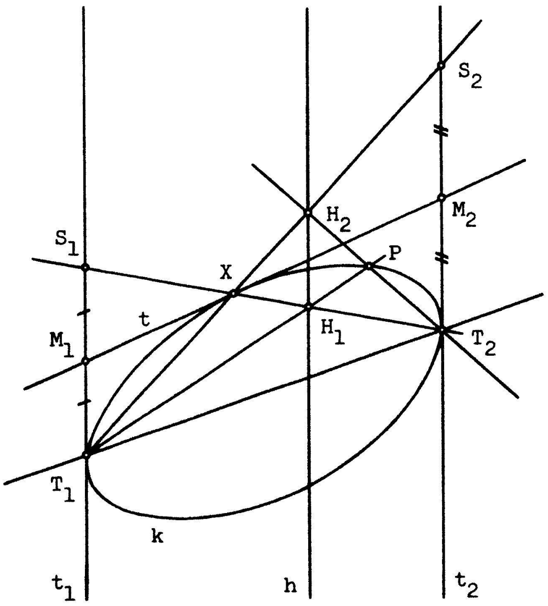
Man zeichne zwischen t_1 und t_2 eine beliebige dazu parallele *Hilfsgerade h.* Die Strahlen $[T_1 P]$ und $[T_2 P]$ schneiden die Hilfsgerade h in Punkten H_1 und H_2. Die beiden Verbindungsgeraden $[T_1 H_2]$ und $[T_2 H_1]$ schneiden sich dann in einem *Punkte X* des Ellipsenbogens $(T_1 P T_2)$. Durch verschiedene Wahl der Hilfsgeraden h kann man so beliebig viele Punkte X der Ellipse k erhalten.

Sind weiter S_1 und S_2 die Schnittpunkte der Geraden $[T_2 H_1]$ und $[T_1 H_2]$ mit den Tangenten t_1 und t_2 und sind M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Strecken $T_1 S_1$ und $T_2 S_2$, dann liegen die drei Punkte M_1, X, M_2 auf einer Geraden t, welche die *Tangente* der Ellipse k im Punkte X ist [1*].

Weil das Halbieren einer Strecke (Stechzirkel!) einfacher und genauer ist als das Halbieren eines Winkels, ist damit auch eine besonders einfache und genaue Konstruktion der Ellipsentangenten in den Punkten X gewonnen.

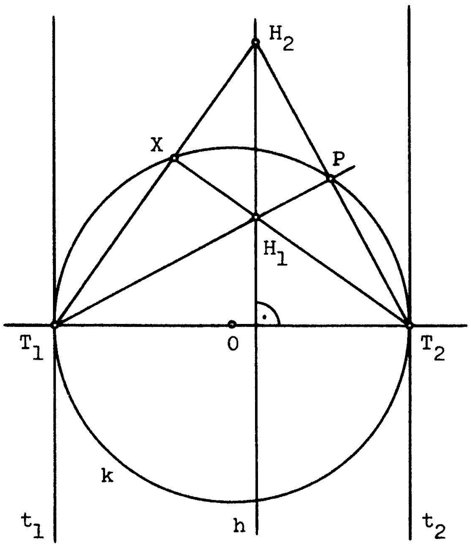
Weil die angegebenen Konstruktionen für Punkte und Tangenten einer Ellipse *affin invariant* sind, genügt es, ihre Richtigkeit für einen *Kreis k* zu beweisen.

Zum *Beweis* seien also t_1 und t_2 zwei parallele Tangenten des Kreises k in den (diametralen) Punkten T_1 und T_2, ferner P ein fester Punkt von k (Figur 2). Ist dann h

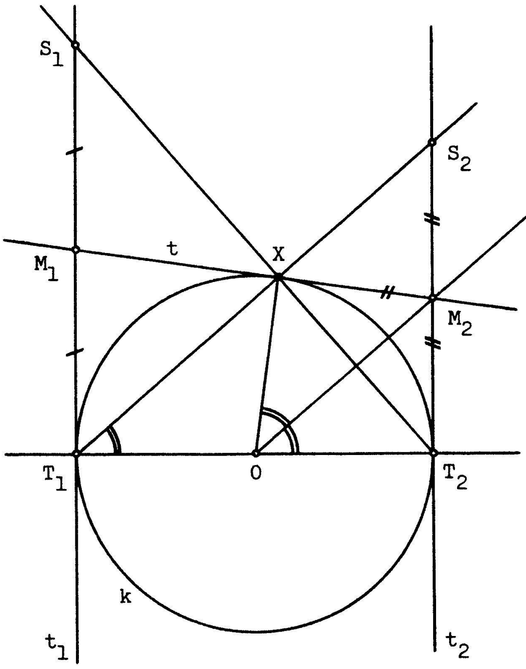


Figur 1.

eine beliebige Parallele zu t_1 und t_2, dann liefert unsere Konstruktion als Schnittpunkt X der beiden Geraden $[T_1H_2]$ und $[T_2H_1]$ einen *Punkt* X, von dem nun zu zeigen ist, dass er *auf dem Kreis* k liegt. Weil nun h auf dem Kreisdurchmesser $[T_1T_2]$ normal steht und weil nach dem Satz von Thales auch die beiden Geraden $[T_1P]$ und $[T_2P]$ zueinander normal sind, ist der Schnittpunkt H_1 von h mit der Geraden $[T_1P]$ der *Höhenschnittpunkt* des Dreiecks $(T_1T_2H_2)$; analog ist der Schnittpunkt H_2 von h mit der Geraden $[T_2P]$ der *Höhenschnittpunkt* des Dreiecks $(T_1T_2H_1)$. Daher sind auch die beiden Geraden $[T_1H_2]$ und $[T_2H_1]$ zueinander normal und ihr Schnittpunkt X liegt folglich nach dem Satz von Thales auf dem Kreis k, was zu beweisen war.



Figur 2.



Figur 3.

Die Richtigkeit der *Tangentenkonstruktion* folgt bei dem Kreis k sofort aus dem Peripherie- und Zentriwinkelsatz (Figur 3). Die Tangente t des Kreises k im Punkte X schneidet die Tangente t_2 von T_2 in einem Punkte M_2, für den $M_2X = M_2T_2$ gilt. Daher liegt M_2 auf der Halbierenden des Winkels T_2OX. Somit sind die Geraden $[OM_2]$ und $[T_1X]$ zueinander parallel. Schneidet dann die Gerade $[T_1X]$ die Tangente t_2 von T_2 im Punkte S_2, so folgt aus dem Strahlensatz, weil O Mittelpunkt der Strecke T_1T_2 ist, dass auch der Punkt M_2 Mittelpunkt der Strecke T_2S_2 ist. Die Tangente t des Kreises k im Punkte X enthält also tatsächlich den Mittelpunkt M_2 der Strecke T_2S_2. Schneidet weiter die Tangente t_1 von T_1 die Gerade $[T_2X]$ im Punkte S_1, so liegt aus demselben Grunde auch der Mittelpunkt M_1 der Strecke T_1S_1 auf der *Tangente t* des Kreises k im Punkte X. Die Tangente t von X ist also die Verbindungsgerade der Punkte M_1 und M_2, was zu beweisen war.

Karl Strubecker, Universität Karlsruhe

ANMERKUNG

[1*] Ich habe diese einfache Tangentenkonstruktion der Ellipse (die sinngemäß auch für die Hyperbel und Parabel gilt) schon in dem Buche «Vorlesungen über Darstellende Geometrie» (Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 2. Auflage 1960) mitgeteilt.

0013-6018/88/010000-02 $1.50+0.20/0