

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 43 (1988)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 19.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Aufgabe 953. Man bestimme in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Funktionen $f: \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ mit der Eigenschaft

$$(*) \quad f(i) = \text{card } f^{-1}(i) \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n.$$

P. G. Becker-Landeck,
S. Eckmann, Plettenberg, BRD

Lösung. Bezeichnet $A(n)$ die zu bestimmende Anzahl, so gilt

$$A(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0, 1, 2, 5 \\ 1 & \text{für } n = 4 \text{ und alle } n \geq 6 \\ 2 & \text{für } n = 3. \end{cases}$$

Der Beweis ergibt sich aus dem Resultat von Aufgabe 751, El. Math. 31 (1976), p. 122/123.

J. Binz, Bolligen
Hj. Stocker, Wädenswil

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-wai Lau (Hong Kong), W. Raffke (Vechta, BRD), B. Roberts (Portland, USA), L. N. Siccha (Berlin), W. Teschke (Köln, BRD), K. Warneke (Vechta, BRD).

Bemerkung der Redaktion: W. Janous findet die Lösung in M. D. McKay & M. S. Waterman, Self-descriptive strings, The Math. Gazette 66 (1982), p. 1–4.

Aufgabe 954. Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n , deren Quadratwurzeln die Kettenbruchentwicklung

$$\sqrt{n} = [a; \overline{m, m, \dots, m, 2a}]$$

mit k -Gliedern haben ($k, m \in \mathbb{N}; 2a \neq m$).

J. Binz, Bolligen

Lösung: Wir definieren die von a und m abhängigen Folgen (p_j) , (q_j) natürlicher Zahlen rekursiv durch

$$p_{-1} := 1, p_0 := 2a, p_j := mp_{j-1} + p_{j-2} \quad (j \geq 1);$$

$$q_{-1} := 0, q_0 := 1, q_j := mq_{j-1} + q_{j-2} \quad (j \geq 1).$$

Nun behaupten wir, dass (unter der Bedingung $2a \neq m$) für $n \in \mathbb{N}$ die Zahl \sqrt{n} genau dann die geforderte Kettenbruchentwicklung $[a; \overline{m, \dots, m, 2a}]$ mit Periodenlänge

$k = l + 1$ hat, wenn gilt

$$n = a^2 + \frac{p_{l-1}}{q_l} \quad \text{und} \quad q_l(a, m) \mid p_{l-1}(a, m). \quad (1)$$

Wegen $\sqrt{n} + a = [\overline{2a; m, \dots, m}] = [2a; m, \dots, m, \sqrt{n} + a]$ mit jeweils l Elementen m ist nach einem wohlbekannten Resultat aus der Kettenbruchtheorie

$$\sqrt{n} + a = \frac{(\sqrt{n} + a) p_l + p_{l-1}}{(\sqrt{n} + a) q_l + q_{l-1}} \quad (2)$$

oder gleichbedeutend

$$(\sqrt{n} + a)^2 q_l + (\sqrt{n} + a) (q_{l-1} - p_l) - p_{l-1} = 0$$

oder wegen der Irrationalität von \sqrt{n}

$$(n + a^2) q_l + a (q_{l-1} - p_l) - p_{l-1} = 0, \quad 2a q_l + q_{l-1} - p_l = 0.$$

Trägt man hier die zweite in die erste Gleichung ein, so folgt $n = a^2 + \frac{p_{l-1}}{q_l}$ wie in (1)

behauptet. Schliesslich ist die Ganzzahligkeit von n mit $q_l \mid p_{l-1}$ äquivalent, womit (wegen der Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung) alles bewiesen ist. Offenbar gilt die Charakterisierung (1) auch für $k = 1$.

Anwendung. Wir geben untenstehend noch alle die Zahl 50 nicht übersteigenden natürlichen Zahlen n an mit $\sqrt{n} = [a; \overline{m, \dots, m, 2a}]$, $m \neq 2a$ und Periodenlänge k , geordnet nach gemeinsamen k -Werten.

$$k = 1: n = 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50;$$

$$k = 2: n = 3, 6, 8, 11, 12, 15, 18, 20, 24, 27, 30, 35, 38, 39, 40, 42, 48;$$

$$k = 3: n = 41;$$

$$k = 4: n = 7, 32;$$

$$k = 5: n = 13.$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), W. Raffke (Vechta, BRD), M. Vowe (Therwil), B. de Weger (Enschede, NL).

Aufgabe 955. Für reelle a, b, c mit $0 < a, b, c < 1/2$ und $a + b + c = 1$ zeige man

$$\sqrt{(1-2a)(1-2b)(1-2c)} \leq 3 \sqrt[3]{abc}.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

L. Cseh, I. Merényi, Cluj, Rumänien

Lösung: Aus $0 < 1 - 2a = -a + b + c$ etc. ergibt sich, dass a , b und c Seiten eines Dreiecks mit Halbumfang $s = 1/2$ sind. Die behauptete Ungleichung lautet dann

$$8(s-a)(s-b)(s-c) \leq 27a^2b^2c^2,$$

d. h.

$$64s^3(s-a)(s-b)(s-c) \leq 27a^2b^2c^2 \quad (1)$$

(1) ist aber gerade 1.12. (für den Fall $s = 1/2$) aus [1].

Gleichheit gilt genau für $a = b = c = 1/3$.

W. Janous, Innsbruck, A

Bemerkung der Redaktion: A. Braune (Linz, A) zeigt unter Hinweis auf 4.7 in [1]:

$$\sqrt{(1-2a)(1-2b)(1-2c)} \geq (\sqrt{3}/3)(3-8(a^2+b^2+c^2)).$$

LITERATURVERZEICHNIS

1 O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Groningen 1969.

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, Yu), J. Binz (Bolligen), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), P. Hohler (Olten), A. A. Jagers (Enschede, NL), M. S. Klamkin (Alberta, CD), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. Mascioni (Origlio), P. Nüesch (Lausanne), S. Nanba (Okayama, Japan), W. Raffke (Vechta, BRD), B. Schenker (Solothurn), Tsen-Pao Shen (München, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), L. N. Siccha (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil, 2 Lösungen), K. Warneke (Vechta, BRD), H. Wellstein (Flensburg, BRD), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 956. Man finde bestmögliche Konstanten c_1, c_2 derart, dass

$$\frac{1}{n-c_1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n-c_2} \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}. \quad (*)$$

Anmerkung: Nach A. Ostrowski (s. [1], p. 39) gilt die rechte Ungleichung (*) für $c_2 = 1/2$.

LITERATURVERZEICHNIS

1 A. Ostrowski, *Aufgabensammlung zur Infinitesimalrechnung*, Bd. I, Basel 1964.

2 P. Ivady, *Aufgabe 934*, *El. Math.* 40 (1985) 154.

V. D. Mascioni, Zürich

Lösung: Mit $s(n) := \sum_{k \geq n} k^{-2}$ setzen wir $c(n) := n - \frac{1}{s(n)}$ für $n = 1, 2, \dots$ und behaupten

$$c(1) \leq c(n) < \frac{1}{2} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(n) = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Hieraus folgt: Rechts in (*) ist die Wahl $c_2 = \frac{1}{2}$ bestmöglich, während man links in (*) für c_1 jede reelle Zahl unterhalb $c(1) = 1 - \frac{6}{\pi^2} = 0,392 \dots$ wählen kann (solange man dort *strenge* Ungleichung verlangt).

Die Ostrowskische Ungleichung

$$s(n) < \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \sum_{k \geq n} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{n - \frac{1}{2}}$$

für $n = 1, 2, \dots$ bestätigt zunächst die rechte Hälfte von (1). Die Eulersche Summenformel liefert

$$s(n) = \int_n^\infty t^{-2} dt + \frac{1}{2n^2} + 2 \int_n^\infty \left([t] + \frac{1}{2} - t \right) t^{-3} dt$$

für $n = 1, 2, \dots$, und da hier das zweite Integral offensichtlich positiv ist,

$$s(n) > \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots,$$

was mit

$$c(n) > \frac{n}{2n+1} \quad (3)$$

äquivalent ist. Aus (3) folgt $c(n) > \frac{2}{5} (= 0,4 > c(1))$ für alle $n \geq 2$, was die linke Hälfte von (1) bestätigt; aus (3) und der rechten Hälfte von (1) folgt schliesslich (2).

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Bracken (Toronto, CD), Chr. A. Meyer (Bern), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. August 1988* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 977. Let $p_m(x)$ denote the characteristic polynomial of the (m, m) top left submatrix of an $(n+1, n+1)$ irreducible tridiagonal matrix $A = (a_{ij})$. Let $p_{n+1}(x)$ have $n+1$ distinct real zeros ξ_0, \dots, ξ_n . Put

$$D_k := \begin{vmatrix} p_k(\xi_k) & p_k(\xi_{k+1}) & \cdots & p_k(\xi_n) \\ p_{k+1}(\xi_k) & p_{k+1}(\xi_{k+1}) & \cdots & p_{k+1}(\xi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n(\xi_k) & p_n(\xi_{k+1}) & \cdots & p_n(\xi_n) \end{vmatrix}.$$

Prove that $D_k \neq 0$ ($0 \leq k \leq n$).

Remark: The problem arose in a study of a fluid reservoir regulated by a general birth-death process.

E. A. van Doorn, A. A. Jagers, Enschede, NL

Aufgabe 978. Es seien n und q natürliche Zahlen und a_1, \dots, a_{n+q} positive reelle Zahlen. Man zeige:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^n \left(\frac{1}{q} \sum_{k=n+1}^{n+q} a_k \right)^q \leq \left(\frac{1}{n+q} \sum_{k=1}^{n+q} a_k \right)^{n+q}.$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Aufgabe 979. Man zeige, dass

$$\frac{8(\pi-x)x}{\pi^2(\pi-2x)} < \tan x < \frac{\pi^2 x}{\pi^2 - 4x^2} \quad \text{für } 0 < x < \pi/2.$$

V. D. Mascioni, Origlio

Aufgabe 980. Berechnet man die beiden Integrale

$$I_2 = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \quad \text{und} \quad I_4 = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$$

mit der Simpsonregel, wobei man das Intervall $[0, \pi]$ in mehr als zwei bzw. in mehr als vier Teilintervalle unterteilt, so erhält man die exakten Werte. Ist dies Zufall oder kann man verallgemeinern?

M. Vowe, Therwil

Mitteilung der Redaktion

Herr Prof. Dr. M. Knus (ETH-Zürich) ist auf den 31. 12. 1987 aus der Redaktion ausgetreten. Seine etwas mehr als 5 Jahre währende Mitarbeit an der Zeitschrift sei ihm im Namen der Herausgeber bestens verdankt. Die Rezensionsparte wird ab 1. 1. 1988 neu von Herrn Prof. Dr. H. Chr. Im Hof (Universität Basel) betreut.

Literaturüberschau

M. Davis: *The Art of Decision-Making*. VII und 92 Seiten, 20 Figuren. DM 58.–. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1986.

Dieses Buch gibt 43 Beispiele von zum Teil alltäglichen Situationen, in welchen der „Gesunde Menschenverstand“ zu falschen oder paradoxen Entscheidungen führt. Die Beispiele stammen zum grössten Teil aus dem Bereich der Ökonomie, umfassen aber auch mathematische Spiele, logische Paradoxien, Wahlprobleme und Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Allen Beispielen gemeinsam ist eine didaktisch gekonnte Einleitung, die den naiven Leser unweigerlich in die Falle führt. Das Buch ist auch für den Nichtmathematiker ohne weiteres verständlich, gelegentlich wird jedoch in Form von Anhängen die mathematische Lösung einer Frage skizziert. Der überaus erfrischende Stil dieses schmalen Bandes macht die Lektüre zum Genuss. Die einzige Schwierigkeit für den europäischen Leser besteht darin, dass die beschriebenen Situationen (besonders diejenigen aus dem Kapitel „decisions in business and economics“) etwas stark vom amerikanischen way of life geprägt sind und daher manchen Lesern nicht unmittelbar verständlich sein mögen.

B. Flury

A. Hurwitz and N. Kritikos: *Lectures on Number Theory*. Universitext. Aus dem Deutschen übersetzt von W. C. Schulz. XIV und 273 Seiten. DM 58.–. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1986.

This is a translation into English of notes (in German) of Hurwitz's lectures on elementary number theory, given at the E.T.H. in Zurich. They were edited by N. Kritikos, who attended lectures by Hurwitz in 1916–1917. It is not clear from Kritikos' introduction whether the notes are in fact Hurwitz's own, or whether they were taken by a student attending his lectures. The material, covered in six chapters, is classical. As the translator points out, its organization by Hurwitz is extremely efficient, in particular the joint development of continued fractions and of binary quadratic forms in the last chapter. The translator has added a set of problems after each chapter, and a bibliography for further reading at the end of the book.

J. Steinig

A. Prestel: *Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie*. Aufbaukurse Mathematik. vieweg studium, Band 60. XIV und 286 Seiten, DM 40.–. Vieweg, Braunschweig 1986.

Das Buch geht aus einer Vorlesung über mathematische Logik und Modelltheorie hervor. Es ist somit vor allem an den darin nicht spezialisierten interessierten Mathematiker gerichtet. In diesem Sinne fügt es sich gut in die Reihe „vieweg studium: Aufbaukurs Mathematik“.

Es sollen hier die bekanntesten, in der Algebra zur Zeit üblichen, modelltheoretischen Schlüsse vermittelt werden.