Fastpythagoräische Quadrupel

3 Grünert I. A.: Wenn $n > 1$, so gibt es unter den ganzen Zahlen von 1 bis n nicht zwei Werte von x und y, für welche wenn z einen ganzen Wert bezeichnet, $x^n + y^n = z^n$ ist. Archiv. Math. Phys. *27*, 119–120 (1856).
4 Meres L.: About certain inequalities connected with the great theorem of Fermat. Zeszyt. Nauk. Polit. Śląskiej 560 Mat.-Fiz. *30*, 215–218 (1979).
5 Perisastri M.: On Fermat's last theorem. Amer. Math. Monthly *76*, 671–675 (1969).
6 Ribenboim P.: 13 lectures on Fermat's last theorem. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1980.
7 Towes G.: On Fermat's last theorem. Amer. Math. Monthly *41*, 419–424 (1934).
8 Zeitlin D.: A note on Fermat's last theorem. Fibonacci Quart. *12*, 368–402 (1974).

 0013-6018/88/030078-06$1.50+0.20/0

Fastpythagoräische Quadrupel

1. In [1] beschreibt O. Frink Methoden, alle Lösungen der diophantischen Gleichungen $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ und $x^2 + y^2 = z^2 - 1$ zu finden. Wir lösen mit anderen Methoden das analoge Problem für vier Variable. Ein Quadrupel (x, y, z, w) natürlicher Zahlen heisse *fastpythagoräisch* (FPQ), wenn es eine der beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 + 1 \tag{1}$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 - 1 \tag{2}$$

erfüllt. Gesucht ist ein Verfahren zur Bestimmung aller FPQ. Wir betrachten Lösungen, die nur durch Vertauschung von Komponenten auseinander hervorgehen, als nicht wesentlich verschieden.

2. Wir lösen zuerst (1). Rechnet man modulo 4, so erkennt man, dass x, y, z nicht alle gerade und nicht alle ungerade sein können.

Fall 1: x, y, w gerade, z ungerade. Der Ansatz $(x, y, z, w) = (2a, 2b, 2c - 1, 2c + 2r)$ führt auf

$$c = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2r + 1}.$$

Für jede Wahl von a, b, r mit den Nebenbedingungen $a \le b$, $r \ge 0$, $r^2 < a^2 + b^2$ und $2r + 1 \mid a^2 + b^2 - r^2$ erhält man genau ein FPQ, wie man durch Einsetzen in (1) bestätigt. Für $r = 0$ ergibt sich so die Schar $(2a, 2b, 2a^2 + 2b^2 - 1, 2a^2 + 2b^2)$. $(2, 6, 5, 8)$ ist das FPQ mit kleinstem w, das nicht zu dieser Schar gehört. Ist $(a, b, r + 1)$ ein pythagoräisches Tripel, so entsteht das triviale FPQ $(2a, 2b, 1, 2r + 2)$. Weitere FPQ finden sich in Tabelle 1 am Schluss dieser Note.

Fall 2: x gerade, y, z, w ungerade. Diesmal setzen wir

$$(x, y, z, w) = (2a, 2b - 1, 2c - 1, 2c - 1 + 2r)$$

an und berechnen

$$c = \frac{a^2 + b(b-1) - r(r-1)}{2r};$$

offenbar muss a gerade sein. Mit $a = 2e$ wird

$$c = \frac{4e^2 + b(b-1) - r(r-1)}{2r}.$$

Diesmal sind e und b beliebig wählbar; $r \geq 1$ muss die Bedingung

$$2r | 4e^2 + b(b-1) - r(r-1)$$

erfüllen und so klein gewählt werden, dass $c \geq b$ ausfällt (die letzte Bedingung ist bei $r = 1$ stets erfüllt).
Für $r = 1$ ergibt sich so die Schar $(4e, 2b - 1, 4e^2 + b(b-1) - 1, 4e^2 + b(b-1) + 1)$. $(8, 3, 3, 9)$ ist das kleinste FPQ, das nicht zu dieser Schar gehört. Für $b = 1$ entstehen triviale FPQ $\left(4e, 1, \frac{4e^2 - r^2}{r}, \frac{4e^2 + r^2}{r}\right)$, in denen die erste, dritte und vierte Komponente ein pythagoräisches Tripel bilden. Weitere FPQ sind in Tabelle 2 zu finden.

3. Die Gleichung (2) lässt sich analog behandeln. Diesmal müssen x, y, z alle gerade oder alle ungerade sein.

Fall 1. Mit $(x, y, z, w) = (2a, 2b, 2c, 2c - 1 + 2r)$ kommt man zu

$$c = \frac{a^2 + b^2 - r(r-1)}{2r - 1}.$$

FPQ kommen heraus, wenn man a beliebig und $b \geq a$ wählt, und dann $r \geq 1$ mit $2r - 1 | a^2 + b^2 - r(r-1)$ so klein wählt, dass $c \geq b$ ausfällt.
Für $r = 1$ ergeben sich die FPQ $(2a, 2b, 2a^2 + 2b^2, 2a^2 + 2b^2 + 1)$. Die kleinsten nicht in dieser Schar auftretenden FPQ sind $(4, 4, 4, 7)$ und $(2, 8, 10, 13)$. Für weitere Beispiele siehe Tabelle 3.

Fall 2: Jetzt führt $(x, y, z, w) = (2a - 1, 2b - 1, 2c - 1, 2c + 2r)$ auf

$$c = \frac{a(a-1) + b(b-1) + 1 - r^2}{2r + 1}.$$

FPQ entstehen, wenn man a beliebig und $b \geq a$ wählt, und dann $r \geq 0$ mit $2r + 1 | a(a-1) + b(b-1) + 1 - r^2$ so klein wählt, dass $b \geq c$ ausfällt. Dies geht

Tabelle 1.
$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 + 1$,
x, y gerade, z ungerade.

x	y	z	w
2	2	3	4
2	4	9	10
2	6	19	20
2	6	5	9
...			
4	4	15	16
4	6	25	26
4	6	7	10
...			
6	6	35	36
...			

Tabelle 2.
$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 + 1$,
x gerade, y, z ungerade.

x	y	z	w
4	1	3	5
4	3	5	7
4	5	9	11
4	7	15	17
...			
8	1	15	17
8	3	17	19
8	3	7	11
8	3	3	9
...			

Tabelle 3.
$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 - 1$,
x, y, z gerade.

x	y	z	w
2	2	4	5
2	4	10	11
2	6	20	21
2	8	34	35
2	8	10	13
...			
4	4	16	17
4	4	4	7
4	6	26	27
...			

Tabelle 4.
$x^2 + y^2 + z^2 = w^2 - 1$,
x, y, z ungerade.

x	y	z	w
1	1	1	2
1	3	5	6
1	5	13	14
1	7	25	26
1	7	7	10
...			
3	3	9	10
3	5	17	18
3	7	29	30
...			

sicher für $r = 0$, was die Schar

$$(2a - 1, 2b - 1, 2a(a - 1) + 2b(b - 1) + 1, 2a(a - 1) + 2b(b - 1) + 2)$$

liefert. Das kleinste FPQ, das in ihr nicht vorkommt, ist $(1, 7, 7, 10)$. Weitere FPQ siehe Tabelle 4.

4. Das beschriebene Lösungsverfahren liefert alle FPQ. Die präzise formulierten und deshalb etwas kompliziert aussehenden Nebenbedingungen bewirken, dass jedes FPQ genau einmal vorkommt. In den Tabellen sind für jeden der 4 Fälle die kleinsten FPQ dargestellt.

J. Binz, Mathematisches Institut der Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 Frink O.: Almost Pythagorean Triples. Math. Mag. *60*, 234–236 (1987).

 0013-6018/88/030053-03$1.50+0.20/0