Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Kleine Mitteilungen

Ein elementargeometrischer Beweis des Lotensatzes von Hjelmslev

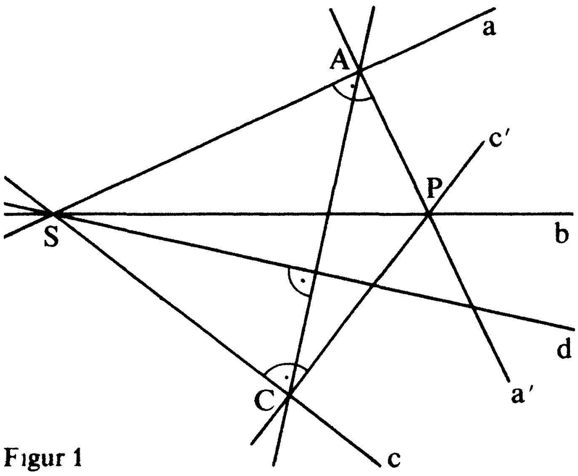
Bachmann hat die ebene metrische (absolute) Geometrie mit Hilfe von Bewegungsgruppen axiomatisch aufgebaut (s. [1] S. 32 ff.). In diesem Aufbau spielt die Konstruktion der vierten Büschelgerade d im Büschel a, b, c mit $a \cap b \cap c = \{S\}$ eine wichtige Rolle. Bezeichnet man die Spiegelung an der Geraden g mit S_g, so ist d die Gerade, für die $S_a S_b S_c = S_d$ gilt.
Diese vierte Büschelgerade läßt sich mit Hilfe des Lotensatzes konstruieren, den Hjelmslev als den Fundamentalsatz der ebenen metrischen Geometrie bezeichnet hat (s. [1] S. 42). Im folgenden wird dieser Satz dadurch elementargeometrisch bewiesen, daß man die Konstruktion von d nach dem Lotensatz mit zwei anderen Konstruktionen von d in Beziehung setzt.

Lotensatz

Liegen a, b, c mit $a \cap b \cap c = \{S\}$ im Büschel, wobei $S_a S_b S_c = S_d$ ist, und ist a' Senkrechte auf a in $A \in a$, c' Senkrechte auf c in $C \in c$ und schneiden sich a' und c' in $P \in b$, so liegen a', b, c' genau dann im Büschel, wenn AC senkrecht zu d ist.

Konstruktion von *d*

Mit diesem Satz läßt sich d als das von S auf AC gefällte Lot konstruieren, wenn man in einem beliebigen Punkt $A \in a$, $A \neq S$ die Senkrechte a' auf a errichtet, im Schnittpunkt P von a' mit b das Lot c' auf c fällt und $C \in c$ der Fußpunkt dieses Lotes ist.



Figur 1

Andere Konstruktionen von *d*

1. Konstruktion

Es seien $a \cap b \cap c = \{S\}$, $\sphericalangle\,(a,b) = \alpha$ und d die Gerade durch S mit $\sphericalangle\,(c,d) = -\alpha$. Dann ist d die vierte Büschelgerade zu a, b, c für die gilt:

$$S_d = S_a S_b S_c\,.$$

Beweis:

$D_{S,\,2\alpha}$ bedeute die Drehung um S mit Drehwinkel 2α. Aus

$$D_{S,\,2\alpha} D_{S,\,-2\alpha} = Id \Leftrightarrow S_a S_b S_c S_d = Id$$

ergibt sich

$$S_a S_b S_c S_d S_d = S_d \Leftrightarrow S_a S_b S_c = S_d\,.$$

2. Konstruktion

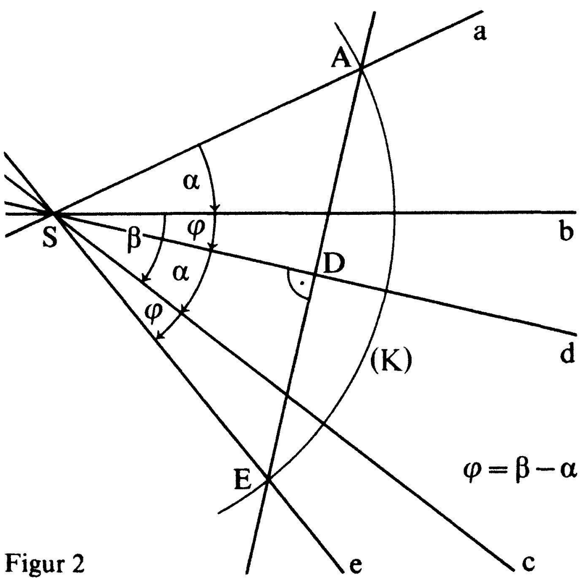
Es seien e die Gerade durch S mit $\sphericalangle\,(c,e) = \varphi = \beta - \alpha$, $\beta = \sphericalangle\,(b,c)$, $A \in a$ und $A \neq S$; der Kreis (K) um S mit $r = |SA|$ schneide e in E. Dann ist d die Winkelhalbierende von $\sphericalangle\,(ASE)$.

Konstruiert man also zunächst den Schnittpunkt E von (K) mit e (e ergibt sich mit Hilfe von $\sphericalangle\,(c,e) = \sphericalangle\,(b,c) - \sphericalangle\,(a,b)$), so erhält man d als das von S auf AE gefällte Lot.

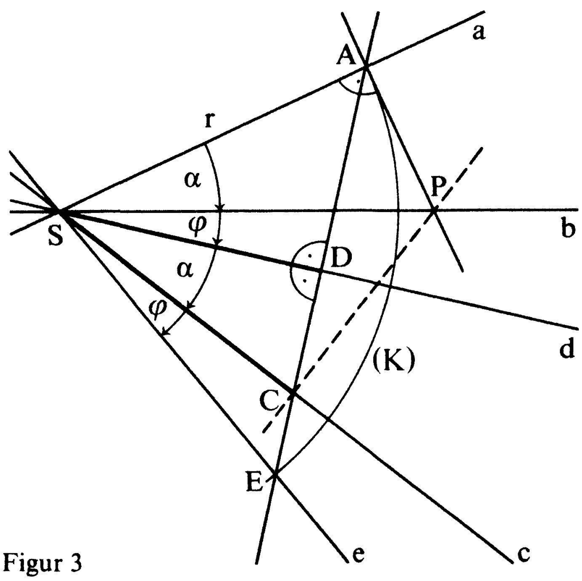
Zusammenhang mit dem Lotensatz

Man zeichnet in Figur 3 die in A auf a senkrecht stehende Gerade a' ein; ihr Schnittpunkt mit b sei P. Der Schnittpunkt von AE mit c heiße C, der Schnittpunkt von AE mit d sei D. Es sei $|SA| = r$.

Um den Lotensatz zu beweisen ist zu zeigen, dass CP senkrecht auf c steht.



Figur 2



Figur 3

Beweis:

In dem bei D rechtwinkligen Dreieck SDA ist $|SD| = r\cos(\alpha+\varphi)$; in dem bei D rechtwinkligen Dreieck SDC ist $|SC| = |SD|: \cos\alpha$. Somit ist $|SC| = r\cos(\alpha+\varphi): \cos\alpha$.
In dem bei A rechtwinkligen Dreieck SPA ist $|SP| = |SA|: \cos\alpha$. Die Projektion von $|SP|$ auf c ist $|SP|\cos(\alpha+\varphi)$; also ist diese Projektion $r\cos(\alpha+\varphi): \cos\alpha = |SC|$. Deshalb ist der Schnittpunkt C von AE mit c der Fußpunkt des von P auf c gefällten Lotes, somit steht PC senkrecht auf c.

Anmerkung: Weil $\sphericalangle(SCP) = 90°$ ist, kann man C auch als Schnittpunkt des Thales-Kreises über $|SP|$ mit c konstruieren. Das Viereck $SCPA$ ist ein Sehnenviereck mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln bei A und bei C.

Helmut Sieber, Böblingen

LITERATURVERZEICHNIS

1 Bachmann F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1974.

 0013-6018/88/030086-03$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 961. Für positive Zahlen x_1, x_2, x_3 sei

$$p_1 := (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad p_2 := (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)/3, \quad p_3 := x_1 x_2 x_3.$$

Dann gilt

$$p_3^2 + 5p_2^3 \geq 6p_1 p_2 p_3$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3$. Dies ist zu zeigen.

V. D. Mascioni, Origlio

Lösung: Setzt man

$$f(x_1, x_2, x_3) = p_3^2 + 5p_2^3 - 6p_1 p_2 p_3,$$

dann ist

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^6 f(x_1, x_2, x_3).$$

f ist also homogen in x_1, x_2, x_3 vom Grade 6 und man kann oBdA normieren:

$$x_1 x_2 = 1, \quad x_1 x_3 = 1 + a, \quad x_2 x_3 = 1 + b, \quad 0 \leq a \leq b.$$