

Un problème de probabilité maximale

Autor(en): **Carnal, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40811>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3. If $j = 2^a p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ with $a \geq 2$, then

$$D(j, n) = \min \{k \mid k \geq 2n, k = p \text{ or } 2p \text{ with } p \not\equiv 1 \pmod{p_i}, i = 1, \dots, r, \\ \text{and } p \equiv 3 \pmod{4}\}.$$

In [6] a proof is given for $j = 3$ and $j = 6$, and all n , using the theory of binary quadratic forms.

P. Schumer, Department of
Mathematics and Computer Science,
Middlebury College

J. Steinig,
Section de Mathématiques
Université de Genève

REFERENCES

- 1 L. K. Arnold, S. J. Benkoski and B. J. McCabe: The Discriminator (A Simple Application of Bertrand's Postulate). *Amer. Math. Monthly* 92, 275–277 (1985).
- 2 P. S. Bremser, P. D. Schumer and L. C. Washington: A Note on the Incongruence of Consecutive Integers to a Fixed Power, preprint.
- 3 R. Breusch: Zur Verallgemeinerung des Bertrand'schen Postulates, dass zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen. *Math. Z.* 34, 505–526 (1932).
- 4 P. Erdős: Über die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen. *Math. Z.* 39, 473–491 (1935).
- 5 G. H. Hardy and E. M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford 1979.
- 6 P. Schumer: On the Incongruence of Consecutive Cubes, preprint.

Un problème de probabilité maximale

Dans un récent article [1], on trouve le théorème suivant:

Théorème: Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes, distribuées selon des lois géométriques de paramètres r_1, \dots, r_n , le maximum de la probabilité $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = i)$ est atteint, pour n et i donnés, lorsque $r_1 = \dots = r_n = i/(n + i)$.

Nous donnons ici une démonstration élémentaire du théorème. Soit F l'ensemble des lois de probabilités sur N avec la convolution $p * q(i) = \sum p(j)q(i - j)$. Soit $g_r(i) = s \cdot r^i$ (avec $s = 1 - r$) la loi géométrique de paramètre $r \geq 0$ et $G_n = \{g_{r(1)} * g_{r(2)} * \dots * g_{r(n)}\}$ l'ensemble des convolutions de n lois géométriques.

Lemme 1: Si $p \in G_n$ et que l'on définit $\Delta p(i) = p(i) - p(i - 1)$, il existe $i_0 = i_0(p)$ tel que $\Delta p(i) \geq 0$ pour $i < i_0$ et $\Delta p(i) < 0$ pour $i \geq i_0$ (unimodularité).

Preuve: On suppose, par hypothèse d'induction, que $p \in G_n$ est unimodulaire et l'on considère $q = p * g_r$.

On trouve

$$q(i) = sp(i) + rq(i-1) \quad (1)$$

$$r \Delta q(i) = s(p(i) - q(i)). \quad (2)$$

Donc $\Delta p(i) \geq 0 \Leftrightarrow p(i) \geq q(i)$. Si $i < i_0(p)$, on a $q(i) \leq \max \{p(j) : j \leq i\} = p(i)$, donc $\Delta q(i) \geq 0$. Posons $i_0(q) = \min \{i : \Delta q(i) < 0\} \geq i_0(p)$. S'il existait des $j > i_0(q)$ avec $\Delta q(j) \geq 0$, on pourrait choisir le plus petit d'entre eux et on aurait $q(j-1) \leq q(j) \leq p(j)$ et $p(j) < p(j-1)$ puisque $i_0(q) \geq i_0(p)$, donc $\Delta q(j-1) \geq 0$ (cf. 2), ce qui contredit la minimalité de j .

Lemme 2: Pour $p \in G_n$ et $i \in \mathbb{N}$ donnés, il existe au plus un $r > 0$ tel que $p(i) = p * g_r(i)$.

Preuve: Soit r une solution, $q = p * g_r$, $\bar{r} > r$ et $\bar{q} = p * g_{\bar{r}}$.

Le lemme 1 et (2) montrent que $p(i) = q(i)$ implique $i < i_0(q)$, donc $q(j-1) \leq q(j) \leq p(j)$ pour $j \leq i$, donc

$q(j) - \bar{q}(j) = (\bar{r} - r)[p(j) - q(j-1)] + \bar{r}[q(j-1) - \bar{q}(j-1)] \geq \bar{r}[q(j-1) - \bar{q}(j-1)]$ et l'on démontre par induction sur j (à partir de $q(0) - \bar{q}(0) = (\bar{r} - r)p(0) > 0$) que $q(j) - \bar{q}(j) > 0$ pour $j \leq i$, donc que $\bar{q}(i) \neq p(i) = q(i)$.

Preuve du théorème: On utilise les identités

$$g_r * g_r(i) = s^2(i+1)r^i \quad (3)$$

$$\frac{d}{dr} g_r(i) = s \cdot i \cdot r^{i-1} - r^i = s^{-1} [(g_r * g_r(i-1) - g_r(i))] \quad (4)$$

Si $p(i)$ est maximal pour $p = \bar{p} * g_r$ ($r > 0$), on doit avoir

$$0 = \frac{d}{dr} \bar{p} * g_r(i) = s^{-1} [\bar{p} * g_r * g_r(i-1) - \bar{p} * g_r(i)] = s^{-1} [p * g_r(i-1) - p(i)] \quad (5)$$

Il résulte de (1) et de $p * g_r(i-1) = p(i)$ que $p(i) = p * g_r(i)$.

Le lemme 2 implique alors que tous les facteurs non triviaux de p sont égaux.

Si p est produit de m facteurs g_r , p est une loi binomiale-négative avec $p(i) = \binom{m+i-1}{i} s^m r^i$.

La condition $p(i) = p * g_r(i-1)$ (cf. 5) donne $mr/i = s = 1 - r$, donc $r = i/(m+i)$ et

$p(i) = \binom{m+i-1}{i} n^m i^i / (n+i)^{n+i}$, expression que nous notons $M_i(m)$. Il suffit finalement

de démontrer que $M_i(m) < M_i(m+1)$ ou que $[m/(m+1)]^{m+1} < [(m+i)/(m+i+1)]^{m+i+1}$. Cela se déduit du fait que $f(x) = [x/(x+1)]^{x+1}$, de dérivée logarithmique

$x^{-1} + \log x - \log(x+1) > 0$, est monotone croissante. Il faut donc, pour obtenir $\max \{p(i); p \in G_n\}$, choisir $m = n$ et $r = i/(n+i)$.

Remarque: Le théorème a un analogue sous forme continue: Si f est convolution de n densités exponentielles $g_s(x) = se^{-sx}$, la plus grande valeur de $f(x)$ est atteinte lorsque tous les facteurs ont le même paramètre $s = n/x$.

H. Carnal, Institut für math. Statistik der Universität Bern

REFERENCES

- 1 Rätz J. et Russell D.: An extremal problem related to probability, Aeq. Math. 34, 316–324 (1987).

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/88/050149-03\$1.50 + 0.20/0

Remarks on the note “Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points”

For any convex body K in the d -dimensional Euclidean space E^d ($d \geq 2$) let $V_n^{(d)}(K)$ be the expected volume of the convex hull H_n of n independent random points chosen identically and uniformly from the interior of K .

For arbitrary plane convex sets, respectively three-dimensional convex bodies, Buchta [2] proves the relationships

$$V_4^{(2)}(K) = 2 V_3^{(2)}(K) \quad (1)$$

and

$$V_5^{(3)}(K) = \frac{5}{2} V_4^{(3)}(K). \quad (2)$$

In a recent note [1] we generalize Buchta's formulae (1) and (2) to

$$V_{2m}^{(2)}(K) = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_{2m-2k+1} V_{2m-2k+1}^{(2)}(K) \quad m = 2, 3, \dots \quad (3)$$

and

$$V_{2m+1}^{(3)}(K) = \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{2m-2k+2} V_{2m-2k+2}^{(3)}(K) \quad m = 2, 3, \dots, \quad (4)$$

where $\alpha_{2m-2k+1}$ and $\beta_{2m-2k+2}$ are constants defined by certain recursion formulae (cf. [1], formulae (1.4'), (1.4''), (1.5') and (1.5'')).