

# Remarks on the note "Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points"

Autor(en): **Affentranger, Fernando**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40812>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$x^{-1} + \log x - \log(x+1) > 0$ , est monotone croissante. Il faut donc, pour obtenir  $\max \{p(i); p \in G_n\}$ , choisir  $m = n$  et  $r = i/(n+i)$ .

**Remarque:** Le théorème a un analogue sous forme continue: Si  $f$  est convolution de  $n$  densités exponentielles  $g_s(x) = se^{-sx}$ , la plus grande valeur de  $f(x)$  est atteinte lorsque tous les facteurs ont le même paramètre  $s = n/x$ .

H. Carnal, Institut für math. Statistik der Universität Bern

#### REFERENCES

- 1 Rätz J. et Russell D.: An extremal problem related to probability, Aeq. Math. 34, 316–324 (1987).

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/88/050149-03\$1.50 + 0.20/0

## Remarks on the note “Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points”

For any convex body  $K$  in the  $d$ -dimensional Euclidean space  $E^d$  ( $d \geq 2$ ) let  $V_n^{(d)}(K)$  be the expected volume of the convex hull  $H_n$  of  $n$  independent random points chosen identically and uniformly from the interior of  $K$ .

For arbitrary plane convex sets, respectively three-dimensional convex bodies, Buchta [2] proves the relationships

$$V_4^{(2)}(K) = 2 V_3^{(2)}(K) \quad (1)$$

and

$$V_5^{(3)}(K) = \frac{5}{2} V_4^{(3)}(K). \quad (2)$$

In a recent note [1] we generalize Buchta's formulae (1) and (2) to

$$V_{2m}^{(2)}(K) = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_{2m-2k+1} V_{2m-2k+1}^{(2)}(K) \quad m = 2, 3, \dots \quad (3)$$

and

$$V_{2m+1}^{(3)}(K) = \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{2m-2k+2} V_{2m-2k+2}^{(3)}(K) \quad m = 2, 3, \dots, \quad (4)$$

where  $\alpha_{2m-2k+1}$  and  $\beta_{2m-2k+2}$  are constants defined by certain recursion formulae (cf. [1], formulae (1.4'), (1.4''), (1.5') and (1.5'')).

If we develop for instance (3) for  $m = 3$  and  $m = 4$  we obtain

$$V_6^{(2)}(K) = \alpha_5 V_5^{(2)}(K) + \alpha_3 V_3^{(2)}(K) \quad (5)$$

and

$$V_8^{(2)}(K) = \alpha_7 V_7^{(2)}(K) + \alpha_5 V_5^{(2)}(K) + \alpha_3 V_3^{(2)}(K). \quad (6)$$

Unfortunately, the values of  $\alpha_3$  and  $\alpha_5$  in (5) and (6) do not coincide and we have an inconsistency in our notation. This can easily be saved by defining the constants in (3) and (4) to be  $\alpha_{2m, 2m-2k+1}$  and  $\beta_{2m+1, 2m-2k+2}$ , respectively.

Further, the two theorems in [1] can be stated in a simpler form, namely

**Theorem.** *Let  $K$  be an arbitrary  $d$ -dimensional convex body ( $d=2, 3$ ). Then,*

$$V_{2m+d}^{(d)}(K) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \binom{2m+d}{2k-1} V_{2m+d+1-2k}^{(d)}(K) \quad d=2, 3; \quad m=1, 2, \dots, \quad (7)$$

where  $\gamma_k$  are constants defined by the recursion formula

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad (7')$$

$$\gamma_k = \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{2k-1}{2i-1} \gamma_i \right) \quad \text{for } k=2, 3, \dots, m. \quad (7'')$$

## Remarks

- (1) This theorem is in all aspects more coherent, simpler and compacter than the two proved in [1].
- (2) From (7') and (7'') one easily verifies that the constants in (7) now only depend on  $k$ .
- (3) The proof of the theorem is the same as those presented in [1].

Fernando Affentranger, Department of Mathematics, University of Buenos Aires

## REFERENCES

- 1 Affentranger F.: Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points. *Elem. Math.* 43, 39–45 (1988).
- 2 Buchta, C.: Über die konvexe Hülle von Zufallspunkten in Eibereichen. *Elem. Math.* 38, 153–156 (1983).