

# Some integral inequalities

Autor(en): **Sándor, Joseph**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40815>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REFERENCES

- 1 Berger J. O.: Statistical decision theory and Bayesian analysis, 2nd ed., Springer, Berlin – Heidelberg – New York 1985.
- 2 Hodges J. L. and Lehmann E. L.: Some problems in minimax point estimation. Ann. Math. Statist. 21, 182–197 (1950).
- 3 Lehmann E. L.: Theory of point estimation. Wiley, New York 1983.
- 4 Loeffel H.: Statistische Inferenz und strategisches Spiel. El. Math. 40, 109–120 (1985).
- 5 Neumann J. v.: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Math. Annalen 100, 295–320 (1928).
- 6 Rauhut B., Schmitz N. und Zachow E.-W.: Spieltheorie. Teubner, Stuttgart 1979.

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/88/060170-08 \$1.50 + 0.20/0

## Some integral inequalities

The aim of this note is to prove some integral inequalities and to find interesting applications for the logarithmic and exponential functions. These relations have some known corollaries ([3], [4], [5], [8]).

**Theorem 1.** *Let  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) be a differentiable function with increasing (strictly increasing) derivative on  $[a, b]$ . Then one has the following inequalities:*

$$\int_a^b f(t) dt \underset{(>)}{\geq} (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) \tag{1}$$

$$2 \cdot \int_a^b f(t) dt \underset{(<)}{\leq} (b - a) f(\sqrt{ab}) + (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} f(b) + \sqrt{a} f(a))$$

(Here  $0 \leq a < b$ ). (2)

**Proof.** The Lagrange mean-value theorem implies:  $f(y) - f(x) \underset{(>)}{\geq} (y - x) f'(x)$  for all  $x, y \in [a, b]$ . Take  $x = (a + b)/2$  and integrate the obtained inequality:

$$\int_a^b f(y) dy - (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) \underset{(>)}{\geq} f'\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \int_a^b \left(y - \frac{a + b}{2}\right) dy = 0,$$

i.e. relation (1).

In order to prove (2) consider as above the inequality  $f(y) - f(x) \underset{(<)}{\leq} (y - x) f'(y)$  with  $x = \sqrt{ab}$ . Integrating by parts on  $[a, b]$  we get

$$\int_a^b f(y) dy - (b - a) f(\sqrt{ab}) \underset{(<)}{\leq} (y - \sqrt{ab}) f(y) \Big|_a^b - \int_a^b f(y) dy$$

which easily implies (2).

**Remark.** Inequality (1) is called sometimes “Hadamard’s inequality” and it is valid for convex functions  $f$  as well with the same proof, but using  $f'_+ \left( \frac{a+b}{2} \right)$  instead of  $f' \left( \frac{a+b}{2} \right)$  (see also [1]).

In applications is useful the following generalization of (1) (see [9])

**Theorem 2.** Let  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  be a  $2k$ -times differentiable function, having continuous  $2k$ -th derivative on  $[a, b]$  and satisfying  $f^{(2k)}(t) \underset{(>)}{\geq} 0$  for  $t \in (a, b)$ . Then one has the inequality:

$$\int_a^b f(t) dt \underset{(>)}{\geq} \sum_{p=1}^k \frac{(b-a)^{2p-1}}{2^{2p-2} (2p-1)!} f^{(2p-2)} \left( \frac{a+b}{2} \right). \quad (3)$$

**Proof.** Apply Taylor’s formula (with Lagrange remainder term) for  $f$  around  $\left( \frac{a+b}{2} \right)$  and integrate term by term this relation. Remarking that  $\int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^{2m-1} dx = 0$  for  $m = 1, 2, 3, \dots$ , we obtain

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (b-a) f \left( \frac{a+b}{2} \right) + \frac{(b-a)}{2^2 3!} f'' \left( \frac{a+b}{2} \right) \\ &+ \dots + \frac{(b-a)^{2k-1}}{2^{2k-2} (2k-1)!} f^{(2k-2)} \left( \frac{a+b}{2} \right) + \int_a^b \frac{(x - (a+b)/2)^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(\xi) dx. \end{aligned}$$

Taking into account  $f^{(2k)}(\xi) \underset{(>)}{\geq} 0$ , we get the desired inequality (3).

**Applications.** 1) Let  $a > 0$ ,  $b = a + 1$ ,  $f_1(t) = \frac{1}{t}$  and  $f_2(t) = -\ln t$  in (1). We can easily deduce the following double inequality:

$$\frac{2a+2}{2a+1} < \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a} < \sqrt{1 + \frac{1}{a}} \quad (4)$$

containing inequalities studied by E. R. Love [4] and G. Pólya – G. Szegő [7]. Using Bernoulli’s inequality we have  $(1 + 1/(2a+1))^{5/2} > 1 + 5/(4a+2) \geq 1 + 1/a$ , for  $a \geq 2$ . Hence we have:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{a+2/5} < e < \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{a+1/2} \quad (a \geq 2) \quad (5)$$

2) By repeating the same argument in (3) for  $k = 2$ ,  $b = a + 1$  ( $a > 0$ ),  $f_1(t) = \frac{1}{t}$ ,  $f_2(t) = -\ln t$ , we obtain:

$$\frac{2a + 2}{2a + 1} e^{\frac{1}{6(2a+1)^2}} < \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a} < \sqrt{1 + \frac{1}{a}} \cdot e^{\frac{1}{3(2a+1)^2}}. \tag{6}$$

This inequality implies for  $a > 0$  e.g. that

$$e^{\frac{1}{2a}\left(1 - \frac{1}{a}\right)} < \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a} < e^{\frac{1}{2a}\left(1 - \frac{1}{2a}\right)} \tag{7}$$

and so

$$A_n = \left(\frac{1}{2} - n \ln e / \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = 0(1/n)$$

which can be compared with the more familiar  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ .

3) Apply (1), (2) for  $f(t) = \frac{1}{t}$  to deduce

$$\sqrt{ab} < L(a, b) < \frac{a + b}{2}, \tag{8}$$

Where  $L(a, b) = \frac{b - a}{\ln b - \ln a}$  denotes the logarithmic means (see [2], [3]). The right-hand side of this inequality is due to B. Ostle and H. L. Terwilliger [6]. The left-hand inequality was stated by B. C. Carlson [2]. (8) was rediscovered also by A. Lupaş [5].

4) Select  $f(t) = -\ln t$  in (2). This application yields the following improvement of the right-hand side of (8):

$$L(a, b) < \left(\frac{a + b}{2} + \sqrt{ab}\right)/2. \tag{9}$$

5) An interesting remark is that one can use (8) (and also (9)) to obtain refinements of this inequality. Indeed, let us consider  $a = \sqrt{x}$ ,  $b = \sqrt{y}$  in (8). It follows that

$$\sqrt{xy} < \sqrt[4]{xy} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right) < L(x, y) < \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right)^2 < \frac{x + y}{2}. \tag{10}$$

With the same argument we can derive (on base of (9)):

$$L(x, y) < \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \sqrt[4]{xy}. \tag{11}$$

6) In order to arrive to a better refinement, we can consider the relation (3) for  $f(t) = 1/t$ ,  $k = 2$  ( $0 < a < b$ ). It results  $L(a, b) < \frac{3}{8}(a + b)^3 / (a^2 + ab + b^2)$ . Letting  $a = \sqrt[3]{x}$ ,  $b = \sqrt[3]{y}$ , this is just one of the Lin [3] and R uthing [8] inequalities:

$$L(x, y) < \left( \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{2} \right)^3 \quad (12)$$

The author wishes to thank the referee for his valuable suggestions.

Joseph S ndor,  
Jud. Harghita, Romania

#### REFERENCES

- 1 Beckenbach E. F.: Convex functions. Bull. Amer. Math. Soc. 54, 439–460 (1948).
- 2 Carlson B. C.: Some inequalities for hypergeometric functions. Proc. Amer. Math. Soc. 17, 32–39 (1966).
- 3 Lin T. P.: The power mean and the logarithmic mean. Amer. Math. Monthly 81, 879–883 (1974).
- 4 Love E. R.: Some logarithm inequalities. Math. Gaz. 64, 55–57 (1980).
- 5 Lupaş A.: Problem 12739. Gaz. Mat. (Bucureşti), Number 2, 1973.
- 6 Ostle B. and Terwilliger H. L.: A comparison of two means. Proc. Montana Acad. Sci. 17, 69–70 (1957).
- 7 P lya G. and Szeg  G.: Aufgaben und Lehrs tze aus der Analysis, vol. I, Ch. 4, Springer 1924.
- 8 R uthing D.: Eine allgemeine logarithmische Ungleichung. El. Math. 41, 14–16 (1986).
- 9 S ndor J.: On Hadamard's inequality (Hungarian). Mat. Lapok (Cluj) 87, 427–430 (1982).

## Kleine Mitteilungen

### Eine komplexe Ungleichung aus elementarer Sicht

Aus der Operatorentheorie ist folgende Ungleichung bekannt:

F r  $f(z_1, z_2) = 1 + 2(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2)^2$  mit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  und  $|z_1| = |z_2| = 1$  gilt

$$|f(z_1, z_2)| \leq 5. \quad (1)$$

Man kann (1) mit Hilfe der Ableitungen beweisen, indem man  $z_1 = \exp(i\varphi_1)$ ,  $z_2 = \exp(i\varphi_2)$  setzt und dann die Paare  $\varphi_1, \varphi_2$  sucht, f r die

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} |f(z_1, z_2)|^2 = \frac{\partial}{\partial \varphi_2} |f(z_1, z_2)|^2 = 0$$