

On Fermat's last theorem

Autor(en): **Choudhry, Ajai**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 6

PDF erstellt am: **27.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40816>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Mit dem Cosinussatz erhält man $(AP)^2 = (2 + \mu)^2 + 1 + 2(2 + \mu) \cos \varphi$ und $(BP)^2 = (2 - \mu)^2 + 1 - 2(2 - \mu) \cos \varphi$; also ist (2) äquivalent zu

$$W_\mu(\cos \varphi) = (AP)^2 (BP)^2 = R \cos^2 \varphi + S \cos \varphi + T \leq 25 \quad (3)$$

$$\text{mit } R = -4(4 - \mu^2), S = 4\mu(\mu^2 - 3), T = (4 - \mu^2)^2 + 2\mu^2 + 9.$$

Für $\mu = 2$ wird $W_2(\cos \varphi) = 8 \cos \varphi + 17$ und (3) gilt offensichtlich. Es sei nun $0 \leq \mu < 2$. Aufgrund der elementaren Theorie der quadratischen Gleichungen weiss man, dass

$W_\mu(\cos \varphi) \leq W(\xi)$ gilt, wobei $\xi = \max\left(1, -\frac{S}{2R}\right)$ ist. Demnach gelten

$$W_\mu(\cos \varphi) \leq W_\mu\left(-\frac{S}{2R}\right) = 25 + \frac{\mu^2(4\mu^2 - 15)}{4 - \mu^2} \text{ für } -\frac{\mu(3 - \mu^2)}{2(4 - \mu^2)} < 1 \text{ und}$$

$$W_\mu(\cos \varphi) \leq W_\mu(1) = (3 + \mu)^2(\mu - 1)^2 \text{ für } -\frac{\mu(3 - \mu^2)}{2(4 - \mu^2)} \geq 1.$$

Da in beiden Fällen die rechtsstehenden Ausdrücke den Wert 25 nicht übertreffen können, ist (2) bewiesen.

Der Beweis hat die «extremalen» Paare (z_1, z_2) der Ungleichung (1) mitgeliefert, nämlich $(1, 1)$, $(1, -1)$ und $(-1, 1)$.

N. Danikas, Fachbereich Mathematik, Aristoteles Universität
Thessaloniki, Griechenland

On Fermat's Last Theorem

In this note we shall prove the following theorem which pertains to Fermat's Last Theorem.

Theorem: *Let $x^n + y^n = z^n$ where x, y, z and n are positive integers such that $x < y < z$ and $n \geq 2$, then*

$$z < x^{1 + \frac{1}{n-1}}. \quad (1)$$

Proof: As $z > y$, we have $z \geq y + 1$, and so

$$x^n + y^n = z^n \geq (y + 1)^n$$

or,

$$x^n \geq (y+1)^n - y^n,$$

whence

$$x^n > n y^{n-1}$$

which gives

$$y < \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}} x^{1 + \frac{1}{n-1}}. \quad (2)$$

Also $z^n = x^n + y^n < 2y^n$.

Using (2), we have

$$z < 2^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}} x^{1 + \frac{1}{n-1}}$$

or,

$$z < \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} x^{1 + \frac{1}{n-1}}.$$

As $n \geq 2$, this gives

$$z < x^{1 + \frac{1}{n-1}}. \quad (3)$$

The result is stronger than the inequality $x^2 > 2z + 1$ proved by Białek for $n \geq 3$.

Ajai Choudhry, Embassy of India, Warsaw

REFERENCE

- 1 Białek K.: On some inequalities connected with Fermat's equation. *El. Math.* 43, 78–83 (1988).