Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 973. D, E, F seien die Ecken eines dem Dreieck ABC einbeschriebenen Dreiecks, wobei $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$. Die Inhalte der Dreiecke DEF, AEF, BFD, CDE seien mit S, S_1, S_2, S_3 bezeichnet. Nach P. Erdös und H. Debrunner gilt dann

$$S \geqq \min(S_1, S_2, S_3).$$

Man beweise oder widerlege folgende mögliche Verschärfungen dieser Ungleichung:

a) $S \geqq H(S_1, S_2, S_3)$ b) $S \geqq G(S_1, S_2, S_3)$.

Dabei bezeichnen H das harmonische, G das geometrische Mittel.

D. P. Mavlo, Moskau, UdSSR

LITERATURVERZEICHNIS

1 Aufgabe 260: El. Math. *11*, 20 (1956).
2 Bottema O. et al.: Geometric inequalities, Groningen 1969, p. 80.

Lösung. Nehmen wir an, dass das Dreieck ABC den Inhalt 1 hat, und dass $BD = \lambda \cdot BC$, $CE = \mu \cdot CA$ und $AF = \nu \cdot AB$ $(0 < \lambda, \mu, \nu < 1)$.

a) Wir berechnen $3S/H - 3$:

$$\begin{aligned} 3S/H - 3 &= S\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) - 3 \\ &= (1 - S_1 - S_2 - S_3)\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) - 3 \\ &= \frac{1 - S_2 - S_3}{S_1} + \frac{1 - S_3 - S_1}{S_2} + \frac{1 - S_1 - S_2}{S_3} - 6. \end{aligned}$$

Nun ist $\dfrac{1 - S_2 - S_3}{S_1} = \dfrac{1 - (1-\nu)\lambda - \mu(1-\lambda)}{(1-\mu)\nu} = \dfrac{1-\lambda}{\nu} + \dfrac{\lambda}{1-\mu}$, usw.

Also hat man

$$\begin{aligned} 3S/H - 3 &= \left(\frac{1-\lambda}{\nu} - 2 + \frac{\nu}{1-\lambda}\right) + \left(\frac{1-\mu}{\lambda} - 2 + \frac{\lambda}{1-\mu}\right) + \left(\frac{1-\nu}{\mu} - 2 + \frac{\mu}{1-\nu}\right) \\ &= \frac{(1-\lambda-\nu)^2}{(1-\lambda)\nu} + \frac{(1-\mu-\lambda)^2}{(1-\mu)\lambda} + \frac{(1-\nu-\mu)^2}{(1-\nu)\mu} \geqq 0 \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau, wenn $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}$.
Hiermit ist a) bewiesen.

b) Wir berechnen $S^3 - G^3$:

$$S^3 - G^3 = \{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) + \lambda\mu\nu\}^3 - (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)\lambda\mu\nu,$$

und dieser Ausdruck ist negativ, wenn man $(\lambda, \mu, \nu) = (\frac{1}{2} - p, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + p)$ wählt für irgendein p, $0 < p < \frac{1}{2}$.
Also ist b) widerlegt.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), Tsen-Pao Shen (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), H. Widmer (Rieden).

Aufgabe 974. Es bezeichne $g(r, n, k)$ die maximale Anzahl von r-dimensionalen Gebieten, in die der r-dimensionale Raum durch n Büschel zu je k parallelen $(r-1)$-dimensionalen Hyperebenen zerlegt wird. Man bestimme $g(r, n, k)$.

J. Binz, Bolligen

Lösung. Wir behaupten, dass $g(r, n, k) = \sum\limits_{t=0}^{r} \binom{r}{t} k^t$.
Offenbar ist die Formel richtig für $r = 1$ (n und k beliebig) und für $n = 1$ (r und k beliebig), das heisst $g(1, n, k) = 1 + nk$, $g(r, 1, k) = 1 + k$.
Der Beweis erfolgt bei festem k durch Induktion bzgl. r und n: Es seien $g(r, n-1, k)$ und $g(r-1, n-1, k)$ bereits bestimmt, und wir haben eine Konfiguration von $(n-1)$ Büscheln im r-dimensionalen Raum, die $g(r, n-1, k)$ Teilgebiete realisiert.
In jeder der neu anzubringenden k Hyperebenen vom letzten Büschel wird von dieser Konfiguration eine Zerlegung in höchstens $g(r-1, n-1, k)$ $(r-1)$ dimensionale Teilgebiete ausgeschnitten, das heisst, jede neuangebrachte Hyperebene vermehrt durch Abspaltung die Anzahl der Teilgebiete um $g(r-1, n-1, k)$ oder weniger. Folglich gilt

$$g(r, n, k) \leqq g(r, n-1, k) + k\, g(r-1, n-1, k).$$

Gleichheit wird erreicht, wenn die n Normalen so gewählt werden, dass jedes r-Tupel von ihnen linear unabhängig ist und die neu anzubringenden k Hyperebenen keinen Punkt gemeinsam haben mit der konvexen Hülle aller beschränkten Teilgebiete der Anfangskonfiguration.
Da diese Situation immer realisiert werden kann, haben wir

$$g(r, n, k) = g(r, n-1, k) + k\, g(r-1, n-1, k),$$

woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Aufgabe 975. Man ermittle die Anzahl $t(m, n)$ aller Polynome n-ten Grades in einer Unbestimmten mit teilerfremden Koeffizienten aus $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$.

R. Wyss, Flumenthal

Lösung. $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ sei die Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}_m$.
$\left[\frac{m}{p_i}\right]$ Zahlen aus $\mathbb{N}_m$ enthalten zumindest den Primfaktor p_i, $\left[\frac{m}{p_i p_j}\right]$ zumindest die Primfaktoren p_i und p_j, usw. Inklusion-Exklusion ergibt jetzt für die Polynome $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_m^{n+1}$

$$t(m,n) = m^{n+1} - \sum_{p_i \in \mathbb{P}} \left[\frac{m}{p_i}\right]^{n+1} + \sum_{p_i, p_j \in \mathbb{P}} \left[\frac{m}{p_i p_j}\right]^{n+1} - + \ldots$$

zulässige Möglichkeiten.
Das Ergebnis lässt sich mit Hilfe der Moebius-Funktion schöner schreiben:

$$t(m,n) = \sum_{i=1}^{m} \mu(i) \left[\frac{m}{i}\right]^{n+1}.$$

J. Binz, Bolligen

Eine weitere Lösung sandte W. Janous (Innsbruck, A).

Aufgabe 976. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $k(n)$ den maximalen quadratfreien Teiler (quadratfreien Kern) von n. Ferner sei

$$\alpha := \prod_{p \,\text{prim}} \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right).$$

Man beweise

$$\sum_{n \leq x} k(n/k(n)) = (3\alpha/\pi^2)\, x \ln x + O(x).$$

A. Bege, Cluj, Rumänien

Lösung. Setzt man $h(n) := k(n/k(n))$ und $H(n) := \sum_{d|n} \mu(d)\, h(n/d)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei μ die Möbius-Funktion bedeutet, so gilt nach der Möbiusschen Umkehrformel

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} H(d) = \sum_{d \leq x} H(d)[x/d]. \tag{1}$$

Mit k sind auch die zahlentheoretischen Funktionen h und H multiplikativ, so daß zur weiteren Umformung von (1) die Werte von H für Potenzen von Primzahlen p zu berechnen sind. Da $h(p^j)$ gleich 1 bzw. p ist, falls $j = 0, 1$ bzw. $j \geq 2$, hat $H(p^j)$ die Werte 1 bzw. $p - 1$ bzw. 0 für $j = 0$ bzw. $j = 2$ bzw. $j \in \{1, 3, 4, \ldots\}$. Damit gilt $H(d) \neq 0$ genau dann, wenn d Quadrat einer quadratfreien natürlichen Zahl ist, und (1) lässt sich zu

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \mu(m)^2 H(m^2)[x/m^2] = x \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(m)^2}{m^2} \prod_{p|m} (p-1) - R(x) \tag{2}$$

umformen. Dabei hat man für das «Restglied» $R(x)$ unter Beachtung der vorher festgestellten Ungleichungen $1 \leq H(m^2) \leq m$ für quadratfreie $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$0 \leq R(x) \leq \sum_{m \leq \sqrt{x}} m = \tfrac{1}{2}[\sqrt{x}]([\sqrt{x}] + 1) \leq x, \tag{3}$$

falls nur $x \geq 1$ gilt.

Bezeichnet nun φ die Eulersche Phifunktion, so leitet man aus der bekannten Asymptotik (vgl. etwa [1], S. 289)

$$\sum_{m \leq y} \mu(m)^2 \varphi(m) = 3\alpha\pi^{-2} y^2 + O(y^{3/2}),$$

α wie in der Aufgabenstellung, mittels partieller Summation die asymptotische Formel

$$\sum_{m \leq y} \frac{\mu(m)^2}{m^2} \varphi(m) = 6\alpha\pi^{-2} \int_1^y t^{-1}\,dt + O(1) = 6\alpha\pi^{-2} \log y + O(1) \tag{4}$$

her. Beachtet man jetzt $\prod_{p|m} (p-1) = \varphi(m)$ für quadratfreie $m \in \mathbb{N}$, so ist wegen (4) die Summe im «Hauptterm» rechts in (2) gleich $3\alpha\pi^{-2} \log x + O(1)$ und man erhält aus (2) und (3) die behauptete Asymptotik.

P. Bundschuh, Köln, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 McCarthy P. J.: Introduction to Arithmetical Functions. Springer, New York et al. (1986).

Weitere Lösungen sandten Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1989* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 997. Let $r, s, t > 1$ be integers $\equiv 1 \bmod 3$ and let

$$3a = st + t + 1, \quad 3b = tr + r + 1, \quad 3c = rs + s + 1.$$

Prove or disprove that

$$N := \frac{(r\,s\,t)!}{(r!)^a (s!)^b (t!)^c}$$

must be an integer.

M. S. Klamkin, Alberta, CD

Aufgabe 998. Für reelle $a, b > 0$ mit $a \neq b$ sei

$$F(a,b) := \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)}.$$

Man zeige: Aus $0 < a < b$, $0 < s < t$ und $c > 0$ folgt

$$\frac{F(b+t,c)}{F(b+s,c)} < \frac{F(a+t,c)}{F(a+s,c)}.$$

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Aufgabe 999. Die Zahlenfolge $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ genüge der Rekursionsformel

$$f(n) = \frac{b+1-f(n-1)}{b-f(n-1)} \quad (n \geqq 2)$$

mit konstantem $b \in \mathbb{R}$. Zeige: Zu jeder natürlichen Zahl $m \geqq 2$ und beliebig gegebenem Startwert $f(1)$ lässt sich ein b so finden, dass $f(n)$ periodisch mit der Periodenlänge m wird.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 1000. Man gebe die Lösung der Rekursionsgleichung

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (-1)^j \binom{q-j+1}{j} \alpha_{q-j} = 0, \quad q > 0 \tag{1}$$

mit $\alpha_1 = 1$ in geschlossener Form an.

A. Müller, Zürich