

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 6

PDF erstellt am: **05.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Aufgaben

**Aufgabe 973.**  $D, E, F$  seien die Ecken eines dem Dreieck  $ABC$  eingeschriebenen Dreiecks, wobei  $D \in BC, E \in CA, F \in AB$ . Die Inhalte der Dreiecke  $DEF, AEF, BFD, CDE$  seien mit  $S, S_1, S_2, S_3$  bezeichnet. Nach P. Erdős und H. Debrunner gilt dann

$$S \geq \min(S_1, S_2, S_3).$$

Man beweise oder widerlege folgende mögliche Verschärfungen dieser Ungleichung:

$$\text{a) } S \geq H(S_1, S_2, S_3) \quad \text{b) } S \geq G(S_1, S_2, S_3).$$

Dabei bezeichnen  $H$  das harmonische,  $G$  das geometrische Mittel.

D. P. Mavlo, Moskau, UdSSR

### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Aufgabe 260: El. Math. 11, 20 (1956).
- 2 Bottema O. et al.: Geometric inequalities, Groningen 1969, p. 80.

**Lösung.** Nehmen wir an, dass das Dreieck  $ABC$  den Inhalt 1 hat, und dass  $BD = \lambda \cdot BC$ ,  $CE = \mu \cdot CA$  und  $AF = \nu \cdot AB$  ( $0 < \lambda, \mu, \nu < 1$ ).

a) Wir berechnen  $3S/H - 3$ :

$$\begin{aligned} 3S/H - 3 &= S \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right) - 3 \\ &= (1 - S_1 - S_2 - S_3) \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right) - 3 \\ &= \frac{1 - S_2 - S_3}{S_1} + \frac{1 - S_3 - S_1}{S_2} + \frac{1 - S_1 - S_2}{S_3} - 6. \end{aligned}$$

$$\text{Nun ist } \frac{1 - S_2 - S_3}{S_1} = \frac{1 - (1 - \nu)\lambda - \mu(1 - \lambda)}{(1 - \mu)\nu} = \frac{1 - \lambda}{\nu} + \frac{\lambda}{1 - \mu}, \text{ usw.}$$

Also hat man

$$\begin{aligned} 3S/H - 3 &= \left( \frac{1 - \lambda}{\nu} - 2 + \frac{\nu}{1 - \lambda} \right) + \left( \frac{1 - \mu}{\lambda} - 2 + \frac{\lambda}{1 - \mu} \right) + \left( \frac{1 - \nu}{\mu} - 2 + \frac{\mu}{1 - \nu} \right) \\ &= \frac{(1 - \lambda - \nu)^2}{(1 - \lambda)\nu} + \frac{(1 - \mu - \lambda)^2}{(1 - \mu)\lambda} + \frac{(1 - \nu - \mu)^2}{(1 - \nu)\mu} \geq 0 \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau, wenn  $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}$ .

Hiermit ist a) bewiesen.

b) Wir berechnen  $S^3 - G^3$ :

$$S^3 - G^3 = \{(1 - \lambda)(1 - \mu)(1 - \nu) + \lambda \mu \nu\}^3 - (1 - \lambda)(1 - \mu)(1 - \nu) \lambda \mu \nu,$$

und dieser Ausdruck ist negativ, wenn man  $(\lambda, \mu, \nu) = (\frac{1}{2} - p, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + p)$  wählt für irgendein  $p$ ,  $0 < p < \frac{1}{2}$ .

Also ist b) widerlegt.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), Tsen-Pao Shen (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), H. Widmer (Rieden).

**Aufgabe 974.** Es bezeichne  $g(r, n, k)$  die maximale Anzahl von  $r$ -dimensionalen Gebieten, in die der  $r$ -dimensionale Raum durch  $n$  Bündel zu je  $k$  parallelen  $(r - 1)$ -dimensionalen Hyperebenen zerlegt wird. Man bestimme  $g(r, n, k)$ .

J. Binz, Bolligen

**Lösung.** Wir behaupten, dass  $g(r, n, k) = \sum_{t=0}^r \binom{r}{t} k^t$ .

Offenbar ist die Formel richtig für  $r = 1$  ( $n$  und  $k$  beliebig) und für  $n = 1$  ( $r$  und  $k$  beliebig), das heisst  $g(1, n, k) = 1 + nk$ ,  $g(r, 1, k) = 1 + k$ .

Der Beweis erfolgt bei festem  $k$  durch Induktion bzgl.  $r$  und  $n$ : Es seien  $g(r, n - 1, k)$  und  $g(r - 1, n - 1, k)$  bereits bestimmt, und wir haben eine Konfiguration von  $(n - 1)$  Bündeln im  $r$ -dimensionalen Raum, die  $g(r, n - 1, k)$  Teilgebiete realisiert.

In jeder der neu anzubringenden  $k$  Hyperebenen vom letzten Bündel wird von dieser Konfiguration eine Zerlegung in höchstens  $g(r - 1, n - 1, k)$   $(r - 1)$  dimensionale Teilgebiete ausgeschnitten, das heisst, jede neuangebrachte Hyperebene vermehrt durch Abspaltung die Anzahl der Teilgebiete um  $g(r - 1, n - 1, k)$  oder weniger. Folglich gilt

$$g(r, n, k) \leq g(r, n - 1, k) + k g(r - 1, n - 1, k).$$

Gleichheit wird erreicht, wenn die  $n$  Normalen so gewählt werden, dass jedes  $r$ -Tupel von ihnen linear unabhängig ist und die neu anzubringenden  $k$  Hyperebenen keinen Punkt gemeinsam haben mit der konvexen Hülle aller beschränkten Teilgebiete der Anfangskonfiguration.

Da diese Situation immer realisiert werden kann, haben wir

$$g(r, n, k) = g(r, n - 1, k) + k g(r - 1, n - 1, k),$$

woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

**Aufgabe 975.** Man ermittle die Anzahl  $t(m, n)$  aller Polynome  $n$ -ten Grades in einer Unbestimmten mit teilerfremden Koeffizienten aus  $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \dots, m\}$ .

R. Wyss, Flumenthal

**Lösung.**  $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$  sei die Menge der Primzahlen in  $\mathbb{N}_m$ .

$\left[\frac{m}{p_i}\right]$  Zahlen aus  $\mathbb{N}_m$  enthalten zumindest den Primfaktor  $p_i$ ,  $\left[\frac{m}{p_i p_j}\right]$  zumindest die Primfaktoren  $p_i$  und  $p_j$ , usw. Inklusion-Exklusion ergibt jetzt für die Polynome  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_m^{n+1}$

$$t(m, n) = m^{n+1} - \sum_{p_i \in \mathbb{P}} \left[\frac{m}{p_i}\right]^{n+1} + \sum_{p_i, p_j \in \mathbb{P}} \left[\frac{m}{p_i p_j}\right]^{n+1} - + \dots$$

zulässige Möglichkeiten.

Das Ergebnis lässt sich mit Hilfe der Moebius-Funktion schöner schreiben:

$$t(m, n) = \sum_{i=1}^m \mu(i) \left[\frac{m}{i}\right]^{n+1}.$$

J. Binz, Bolligen

Eine weitere Lösung sandte W. Janous (Innsbruck, A).

**Aufgabe 976.** Für  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne  $k(n)$  den maximalen quadratfreien Teiler (quadratfreien Kern) von  $n$ . Ferner sei

$$\alpha := \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right).$$

Man beweise

$$\sum_{n \leq x} k(n/k(n)) = (3\alpha/\pi^2) x \ln x + O(x).$$

A. Bege, Cluj, Rumänien

**Lösung.** Setzt man  $h(n) := k(n/k(n))$  und  $H(n) := \sum_{d|n} \mu(d) h(n/d)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $\mu$  die Möbius-Funktion bedeutet, so gilt nach der Möbiusschen Umkehrformel

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} H(d) = \sum_{d \leq x} H(d) [x/d]. \quad (1)$$

Mit  $k$  sind auch die zahlentheoretischen Funktionen  $h$  und  $H$  multiplikativ, so daß zur weiteren Umformung von (1) die Werte von  $H$  für Potenzen von Primzahlen  $p$  zu berechnen sind. Da  $h(p^j)$  gleich 1 bzw.  $p$  ist, falls  $j = 0, 1$  bzw.  $j \geq 2$ , hat  $H(p^j)$  die Werte 1 bzw.  $p - 1$  bzw. 0 für  $j = 0$  bzw.  $j = 2$  bzw.  $j \in \{1, 3, 4, \dots\}$ . Damit gilt  $H(d) \neq 0$  genau dann, wenn  $d$  Quadrat einer quadratfreien natürlichen Zahl ist, und (1) lässt sich zu

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \mu(m)^2 H(m^2) [x/m^2] = x \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(m)^2}{m^2} \prod_{p|m} (p-1) - R(x) \quad (2)$$

umformen. Dabei hat man für das «Restglied»  $R(x)$  unter Beachtung der vorher festgestellten Ungleichungen  $1 \leq H(m^2) \leq m$  für quadratfreie  $m \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$0 \leq R(x) \leq \sum_{m \leq \sqrt{x}} m = \frac{1}{2} [\sqrt{x}] ([\sqrt{x}] + 1) \leq x, \tag{3}$$

falls nur  $x \geq 1$  gilt.

Bezeichnet nun  $\varphi$  die Eulersche Phifunktion, so leitet man aus der bekannten Asymptotik (vgl. etwa [1], S. 289)

$$\sum_{m \leq y} \mu(m)^2 \varphi(m) = 3 \alpha \pi^{-2} y^2 + O(y^{3/2}),$$

$\alpha$  wie in der Aufgabenstellung, mittels partieller Summation die asymptotische Formel

$$\sum_{m \leq y} \frac{\mu(m)^2}{m^2} \varphi(m) = 6 \alpha \pi^{-2} \int_1^y t^{-1} dt + O(1) = 6 \alpha \pi^{-2} \log y + O(1) \tag{4}$$

her. Beachtet man jetzt  $\prod_{p|m} (p-1) = \varphi(m)$  für quadratfreie  $m \in \mathbb{N}$ , so ist wegen (4) die Summe im «Hauptterm» rechts in (2) gleich  $3 \alpha \pi^{-2} \log x + O(1)$  und man erhält aus (2) und (3) die behauptete Asymptotik.

P. Bundschuh, Köln, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 McCarthy P. J.: Introduction to Arithmetical Functions. Springer, New York et al. (1986).

Weitere Lösungen sandten Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis 10. Juni 1989 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit Problem ... A, B bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 997.** Let  $r, s, t > 1$  be integers  $\equiv 1 \pmod 3$  and let

$$3a = st + t + 1, \quad 3b = tr + r + 1, \quad 3c = rs + s + 1.$$

**Prove or disprove that**

$$N := \frac{(rst)!}{(r!)^a (s!)^b (t!)^c}$$

**must be an integer.**

M. S. Klamkin, Alberta, CD

**Aufgabe 998.** Für reelle  $a, b > 0$  mit  $a \neq b$  sei

$$F(a, b) := \frac{1}{e} \left( \frac{b^b}{a^a} \right)^{1/(b-a)}.$$

Man zeige: Aus  $0 < a < b$ ,  $0 < s < t$  und  $c > 0$  folgt

$$\frac{F(b+t, c)}{F(b+s, c)} < \frac{F(a+t, c)}{F(a+s, c)}.$$

H. Alzer, Waldbröl, BRD

**Aufgabe 999.** Die Zahlenfolge  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  genüge der Rekursionsformel

$$f(n) = \frac{b+1-f(n-1)}{b-f(n-1)} \quad (n \geq 2)$$

mit konstantem  $b \in \mathbb{R}$ . Zeige: Zu jeder natürlichen Zahl  $m \geq 2$  und beliebig gegebenem Startwert  $f(1)$  lässt sich ein  $b$  so finden, dass  $f(n)$  periodisch mit der Periodenlänge  $m$  wird.

J. Binz, Bolligen

**Aufgabe 1000.** Man gebe die Lösung der Rekursionsgleichung

$$\sum_{j=0}^{\left[ \frac{q+1}{2} \right]} (-1)^j \binom{q-j+1}{j} \alpha_{q-j} = 0, \quad q > 0 \quad (1)$$

mit  $\alpha_1 = 1$  in geschlossener Form an.

A. Müller, Zürich