Periodizitätseigenschaften p-adischer Kettenbrüche

Autor(en): **Becker, P.G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **45 (1990)**

Heft 1

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-42404

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math.	Vol. 45	Nr. 1	Seiten 1–32	Basel, Januar 1990

Periodizitätseigenschaften p-adischer Kettenbrüche

Im Jahre 1968 beschrieb Th. Schneider einen dem bekannten reellen Kettenbruchalgorithmus nachgebildeten Kettenbruchalgorithmus für p-adische Zahlen. Während für die reellen Kettenbrüche bereits seit langer Zeit eine umfangreiche Theorie existiert, gibt es bisher jedoch nur wenige Untersuchungen, die sich eingehender mit dem Schneiderschen p-adischen Kettenbruchalgorithmus beschäftigen.
Bundschuh zeigte, dass die Charakterisierung der rationalen Zahlen als der Zahlen mit abbrechender Kettenbruchentwicklung – im wesentlichen – auch für den Schneiderschen Algorithmus gültig bleibt und stellte die Frage nach einem p-adischen Analogon zum Euler-Langrangeschen Satz. Man sieht leicht, dass der Satz von Euler in einer modifizierten Form richtig bleibt: Hat eine Zahl einen periodischen p-adischen Kettenbruch, so ist sie eine quadratische Irrationalität oder rational von einem bestimmten Typ. Dass die Umkehrung dieser Aussage, nämlich das Analogon zum Satz von Lagrange, nicht richtig ist, wurde erst kürzlich von de Weger bewiesen, indem er explizit quadratische Irrationalzahlen mit nicht-periodischer p-adischer Kettenbruchentwicklung angab.
Hat nun aber die Quadratwurzel einer rationalen Zahl bereits eine periodische p-adische Kettenbruchentwicklung, so kann man ein Analogon zum Satz von Legendre zeigen, d. h. die Periode eines solchen Kettenbruches beginnt gleich nach dem Anfangsglied und sie besteht aus einem symmetrischen Teil, gefolgt von dem doppelten Anfangsglied. Der Beweis dieses Satzes ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

1. Bezeichnungen

Für eine feste Primzahl p werden im folgenden mit $\|_p$ die normierte p-adische Bewertung von $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet (vgl. [1], S. 48 ff.). Für ein gegebenes $\xi_0 \in \mathbb{Q}_p$ mit $|\xi_0|_p = 1$ gibt es dann genau ein $b_0 \in \{1, \ldots, p-1\}$ mit $|\xi_0 - b_0|_p < 1$. Falls $\xi_0 - b_0 \neq 0$, so setzt man $a_1 := |\xi_0 - b_0|_p^{-1}$ und $\xi_1 := a_1(\xi_0 - b_0)^{-1}$. Es gilt dann $a_1 = p^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$ und $|\xi_1|_p = 1$. Man kann nun mit ξ_1 in der gleichen Weise fortfahren und erhält so sukzessive $b_0, b_1, \ldots \in \{1, \ldots, p-1\}$ und $a_1, a_2, \ldots \in \{p^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}\}$, solange nur $\xi_\nu - b_\nu \neq 0$ ist. Für ξ_0 ergibt sich daraus die p-adische Kettenbruchentwicklung

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \ldots + \frac{a_n|}{|\xi_n},$$

für die wir im folgenden abkürzend schreiben: $\xi_0 = [b_0, a_1; b_1, \ldots, a_n; \xi_n]$. (Nähere Angaben zur Existenz, Eindeutigkeit und Konvergenz solcher Entwicklungen finden sich in [2] und [4].) Bricht die Kettenbruchentwicklung von ξ_0 nicht ab, d. h ist $\xi_\nu - b_\nu$ stets von Null verschieden, so erhält man einen unendlichen p-adischen Kettenbruch für ξ_0. Einen solchen Kettenbruch nennt man periodisch, falls es $m, k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_{n+k} = a_n$, $b_{n+k} = b_n$ für alle $n \geq m$. Man schreibt in diesem Fall

$$\xi = [b_0, a_1; \ldots; b_{m-1}, \overline{a_m; b_m, \ldots, a_{m+k-1}; b_{m+k-1}}].$$

Das kleinste k mit dieser Eigenschaft heisst die Periodenlänge und das kleinste solche m die Vorperiodenlänge der Entwicklung.
Die in der p-adischen Kettenbruchentwicklung auftretenden Teilzähler sind von der Form p^α mit einer natürlichen Zahl α und die Teilnenner sind Elemente des primen Restsystems $1, \ldots, p-1$ modulo p. Für eine feste Primzahl p sei deshalb festgesetzt: $E_p := \{p^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}\}$ und $R_p := \{1, \ldots, p-1\}$.

2. Der Satz von Legendre für p-adische Kettenbrüche

Für die reelle Kettenbruchentwicklung ist der Satz von Legendre (vgl. etwa [3], S. 87) bekannt: «Sei d eine rationale Zahl grösser als 1, aber keine Quadratzahl. Dann hat $\sqrt{d}$ einen periodischen Kettenbruch, dessen Periode gleich nach dem Anfangsglied beginnt und die aus einem symmetrischen Teil, gefolgt von dem doppelten Anfangsglied besteht». Da – wie von de Weger [5] kürzlich bewiesen – für $c \in \mathbb{Q}$ der p-adische Kettenbruch von $\sqrt{c}$ nicht notwendigerweise periodisch sein muss, ist dies hier als zusätzliche Voraussetzung zu fordern. Als Analogon zum Satz von Legendre lassen sich dann für ungerade Primzahlen Satz 1 und für $p = 2$ Satz 2 beweisen.

Satz 1. *(i) Sei p eine ungerade Primzahl, $c \in \mathbb{Q}$ mit $|c|_p = 1$ und $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}_p \backslash \mathbb{Q}$. Hat $\sqrt{c}$ einen periodischen p-adischen Kettenbruch mit Periodenlänge h, so existieren $a_1, \ldots, a_h \in E_p$ und $b_0, \ldots, b_h \in R_p$ mit*

$$\sqrt{c} = [b_0, \overline{a_1; b_1, \ldots, a_h; b_h}]$$

und es gilt $b_h = 2\,b_0$ oder $b_h = 2\,b_0 - p$. Im Fall $b_h = 2\,b_0$ bestehen zwischen den Teilzählern und -nennern die folgenden Beziehungen

$$(*) \quad a_\nu = a_{h+1-\nu} \quad \textit{für} \quad \nu = 1, \ldots, h \quad \textit{und} \quad b_\nu = b_{h-\nu} \quad \textit{für} \quad \nu = 1, \ldots, h-1.$$

(ii) Hat umgekehrt $\xi \in \mathbb{Q}_p$ eine p-adische Kettenbruchentwicklung $\xi = [b_0, \overline{a_1; b_1, \ldots, a_h; b_h}]$ mit $a_1, \ldots, a_h \in E_p$ und $b_0, \ldots, b_h \in R_p$, die die Symmetriebedingungen (*) und $b_h = 2\,b_0$ erfüllen, so ist ξ^2 eine rationale Zahl.

Satz 2. *(i) Sei $c \in \mathbb{Q}$ mit $|c|_2 = 1$ und $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}_2 \backslash \mathbb{Q}$. Hat $\sqrt{c}$ einen periodischen 2-adischen Kettenbruch mit Periodenlänge h, so gibt es entweder $a_1, \ldots, a_{h+1} \in E_2$ mit*

$$\sqrt{c} = [1, a_1; 1, \overline{a_2; 1, \ldots, a_{h+1}; 1}]$$

oder $a_1, \ldots, a_{h+2} \in E_2$ *mit*

$$\sqrt{c} = [1, a_1; 1, a_2; \overline{1, a_3; 1, \ldots, a_{h+2}; 1}].$$

Im ersten dieser beiden Fälle bestehen zwischen den Teilzählern die folgenden Beziehungen

$$(**)\quad a_{h+1} = a_h = a_1/2 \quad \textit{und} \quad a_\nu = a_{h+1-\nu} \quad \textit{für} \quad \nu = 2, \ldots, h-1.$$

(*ii*) *Hat umgekehrt* $\xi \in \mathbb{Q}_2$ *eine 2-adische Kettenbruchentwicklung*

$$\xi = [1, a_1; \overline{1, a_2; 1, \ldots, a_{h+1}; 1}]$$

mit $a_1, \ldots, a_{h+1} \in E_2$, *die die Symmetriebedingungen* (**) *erfüllen, so ist* ξ^2 *eine rationale Zahl.*

Bemerkungen. 1. Im folgenden wird nur Satz 1 bewiesen; das Ergebnis für $p = 2$ lässt sich mit ähnlichen Schlüssen herleiten. 2. Dass in Satz 1 tatsächlich $b_h = 2b_0 - p$ auftreten kann und dass dann die Symmetrie der Entwicklung verlorengeht, zeigt das Beispiel $\sqrt{10} = [2, 3; \overline{2, 3; 1, 9; 1}]$ in $\mathbb{Q}_3$.
Der Beweis von Satz 1 wird durch zwei Lemmata vorbereitet, die die Auswertung der bei der Betrachtung der Kettenbrüche auftretenden Näherungsbrüche erleichtern. Zur Berechnung solcher Näherungsbrüche bedient man sich des Muirschen Symbols (siehe etwa [3], S. 6), dessen Werte rekursiv wie folgt erklärt werden.

Definition. Seien $a_1, a_2, \ldots$ und $b_0, b_1, \ldots$ rationale Zahlen. Dann setzt man

$$K\begin{pmatrix} \\ b_0 \end{pmatrix} := b_0, \quad K\begin{pmatrix} a_1 \\ b_0\, b_1 \end{pmatrix} := b_0 b_1 + a_1$$

und für $h \geq 2$

$$K\begin{pmatrix} a_1 & \ldots\, a_h \\ b_0\, b_1 \ldots & b_h \end{pmatrix} := b_h K\begin{pmatrix} a_1 & \ldots\, a_{h-1} \\ b_0\, b_1 \ldots & b_{h-1} \end{pmatrix} + a_h K\begin{pmatrix} a_1 & \ldots\, a_{h-2} \\ b_0\, b_1 \ldots & b_{h-2} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Die Reihenfolge der in den Muirschen Symbolen auftretenden Elemente darf umgekehrt werden, ohne dass sich der Wert der Muirschen Symbole dadurch ändert ([3], S. 12). Dies liefert für $h \geq 2$ die zweite Rekursionsformel

$$K\begin{pmatrix} a_1 & \ldots\, a_h \\ b_0\, b_1 \ldots & b_h \end{pmatrix} := b_0 K\begin{pmatrix} a_2 & \ldots\, a_h \\ b_1\, b_2 \ldots & b_h \end{pmatrix} + a_1 K\begin{pmatrix} a_3 & \ldots\, a_h \\ b_2\, b_3 \ldots & b_h \end{pmatrix}.$$

Lemma 1. *Für eine Primzahl p und* $h \in \mathbb{N}_0$ *seien* $a_1, \ldots, a_h \in E_p$ *und* $b_0, \ldots, b_h \in R_p$. *Dann gilt:*

$$K\begin{pmatrix} a_1 & \ldots\, a_h \\ b_0\, b_1 \ldots & b_h \end{pmatrix} \equiv b_0 \ldots b_h \pmod{p},$$

Beweis. Die Aussage kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden. Man verwendet dabei die in der Definition des Muirschen Symbols auftretende Rekursionsformel.

Lemma 2. *Für eine Primzahl p und $h \in \mathbb{N}$ seien $a_1, \ldots, a_h \in E_p$ und $b_1, \ldots, b_h \in R_p$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $K\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{h-1} \\ b_h \; b_1 & \ldots & b_{h-1} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_h \\ b_1 \; b_2 & \ldots & b_h \end{pmatrix}$,

(ii) $a_\nu = a_{h+1-\nu}$ *für* $\nu = 1, \ldots, h$ *und*

$b_\nu = b_{h-\nu}$ *für* $\nu = 1, \ldots, h-1$.

Beweis. Die Richtung (ii) $\Rightarrow$ (i) ist eine direkte Folgerung aus der Tatsache, dass die Reihenfolge der Elemente im Muirschen Symbol umgekehrt werden darf. (i) $\Rightarrow$ (ii) zeigt man mittels Induktion über h. Die Fälle $h = 1$ und $h = 2$ sind trivial und man nimmt nun an, dass die Behauptung für $1, 2, \ldots, h-1$ gilt und ausserdem mit $a_1, \ldots, a_h \in E_p$ und $b_1, \ldots, b_h \in R_p$ die Beziehung

$$K\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{h-1} \\ b_h \; b_1 & \ldots & b_{h-1} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_h \\ b_1 \; b_2 & \ldots & b_h \end{pmatrix}$$

besteht.

Dann gilt auch:

$$K\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{h-1} \\ b_h \; b_1 & \ldots & b_{h-1} \end{pmatrix} - b_h K\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_{h-1} \\ b_1 \; b_2 & \ldots & b_{h-1} \end{pmatrix} =$$

$$K\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_h \\ b_1 \; b_2 & \ldots & b_h \end{pmatrix} - b_h K\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_{h-1} \\ b_1 \; b_2 & \ldots & b_{h-1} \end{pmatrix}.$$

Mittels der beiden Rekursionsformeln für das Muirsche Symbol folgt daraus:

$$a_1 K\begin{pmatrix} a_3 & \ldots & a_{h-1} \\ b_2 \; b_3 & \ldots & b_{h-1} \end{pmatrix} = a_h K\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_{h-2} \\ b_1 \; b_2 & \ldots & b_{h-2} \end{pmatrix}.$$

Da nach Lemma 1 die Werte des Muirschen Symbols teilerfremd zu p sind, erhält man $a_1 = a_h$ und

$$K\begin{pmatrix} a_3 & \ldots & a_{h-1} \\ b_2 \; b_3 & \ldots & b_{h-1} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_{h-2} \\ b_1 \; b_2 & \ldots & b_{h-2} \end{pmatrix}.$$

Erneute Anwendung von Lemma 1 auf beide Seiten der Gleichung liefert wegen $b_1, \ldots, b_{h-1} \in R_p$ bereits $b_1 = b_{h-1}$, und damit ergibt sich

$$K\begin{pmatrix} a_3 & \ldots & a_{h-1} \\ b_2 \; b_3 & \ldots & b_{h-1} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_{h-2} \\ b_{h-1} \; b_2 & \ldots & b_{h-2} \end{pmatrix}.$$

Da die Aussage des Lemmas bereits für $h-2$ richtig ist, folgt aus dieser Gleichung die Behauptung.

Beweis von Satz 1. Zunächst wird Teil (i) bewiesen; dazu nimmt man an, dass c eine rationale Zahl sei, die den Voraussetzungen des Satzes genügt. Dann gibt es $l \in \mathbb{N}_0$ und $h \in \mathbb{N}$ sowie $a_1, \ldots, a_{l+h} \in E_p$ und $b_0, \ldots, b_{l+h} \in R_p$ mit

$$\sqrt{c} = [b_0, a_1; \ldots; b_l, \overline{a_{l+1}; b_{l+1}, \ldots, a_{l+h}; b_{l+h}}],$$

d. h. der p-adische Kettenbruch von $\sqrt{c}$ hat die Periodenlänge h und die Vorperiodenlänge l.

Man führt nun die Annahme $l > 0$ dadurch zum Widerspruch, dass man aus ihr $a_l = a_{l+h}$ und $b_l = b_{l+h}$ folgert; dies aber widerspricht der Minimalität von l.

Durch die Festlegung $\xi := [\overline{a_{l+1}; b_{l+1}, \ldots, a_{l+h}; b_{l+h}}]$ erhält man

$$\sqrt{c} = [b_0, a_1; b_1, \ldots, a_l; b_l + \xi] \quad \text{und} \quad \xi = [a_{l+1}; b_{l+1}, \ldots, a_{l+h}; b_{l+h} + \xi].$$

Um diese endlichen Kettenbrüche auszuwerten, definiert man:

$$A_\nu := K\begin{pmatrix} & a_1 & \ldots & a_\nu \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_\nu \end{pmatrix} \qquad \nu = 0, \ldots, l, \quad A_{-1} := 1,$$

$$B_\nu := K\begin{pmatrix} & a_2 & \ldots & a_\nu \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_\nu \end{pmatrix} \qquad \nu = 1, \ldots, l, \quad B_{-1} := 0, B_0 := 1,$$

$$C_\nu := K\begin{pmatrix} & a_{l+1} & \ldots & a_{l+\nu} \\ b_{l+h} & b_{l+1} & \ldots & b_{l+\nu} \end{pmatrix} \quad \nu = 0, \ldots, h, \quad C_{-1} := 1,$$

$$D_\nu := K\begin{pmatrix} & a_{l+2} & \ldots & a_{l+\nu} \\ b_{l+1} & b_{l+2} & \ldots & b_{l+\nu} \end{pmatrix} \quad \nu = 1, \ldots, h, \quad D_{-1} := 0, D_0 := 1.$$

Für die Kettenbrüche von ξ und $\sqrt{c}$ ergibt sich daraus (vgl. etwa [3], S. 7)

$$\xi = \frac{C_{h-1}\xi + C_h}{D_{h-1}\xi + D_h} - b_{l+h}$$

und

$$\sqrt{c} = \frac{A_{l-1}\xi + A_l}{B_{l-1}\xi + B_l}.$$

Dies formt man um zu

$$\xi^2 D_{h-1} + \xi(D_h + D_{h-1} b_{l+h} - C_{h-1}) + D_h b_{l+h} - C_h = 0 \tag{1}$$

und

$$-\xi = \frac{B_l\sqrt{c} - A_l}{B_{l-1}\sqrt{c} - A_{l-1}}. \tag{2}$$

Substituiert man in (1) gemäss (2), und multipliziert man anschließend noch mit $(B_{l-1}\sqrt{c}-A_{l-1})^2$, so erhält man einen Ausdruck der Form $X+Y\sqrt{c}=0$ mit ganzen Zahlen X und Y, die wegen der Irrationalität von $\sqrt{c}$ beide Null sein müssen. Für den Vorfaktor Y von $\sqrt{c}$ bedeutet dies:

$$\begin{aligned}-2D_{h-1}B_lA_l+(D_h+D_{h-1}b_{l+h}-C_{h-1})(B_lA_{l-1}+B_{l-1}A_l)&\\+2(C_h-D_hb_{l+h})B_{l-1}A_{l-1}=0.&\qquad(3)\end{aligned}$$

Wegen Lemma 1 ist $C_{h-1}-D_{h-1}b_{l+h}\equiv C_h-D_hb_{l+h}\equiv 0 \pmod p$, und bei Betrachtung von Formel (3) als Kongruenz modulo p folgt damit aus Lemma 1:

$$-2b_{l+1}\ldots b_{l+h-1}h_0(b_1\ldots b_l)^2+2b_{l+1}\ldots b_{l+h}b_0(b_1\ldots b_{l-1})^2b_l\equiv 0 \pmod p.$$

Da $b_0,\ldots,b_{l+h}\in R_p$ und $p\neq 2$, erhält man daraus bereits $b_l=b_{l+h}$. Ersetzt man in (3) A_l durch $b_lA_{l-1}+a_lA_{l-2}$ und substituiert auch B_l, C_h und D_h durch die entsprechenden Ausdrücke, so ergibt sich

$$\begin{aligned}-2D_{h-1}B_{l-2}A_{l-2}a_l^2+(D_{h-2}a_{l+h}-C_{h-1})(B_{l-2}A_{l-1}+B_{l-1}A_{l-2})a_l&\\+2C_{h-2}B_{l-1}A_{l-1}a_{l+h}=0.&\end{aligned}$$

Nach Lemma 1 sind die Vorfaktoren von a_l^2, a_l und a_{l+h} sämtlich zu p teilerfremd, und wegen $a_l, a_{l+h}\in E_p$ folgt daraus $a_l|a_{l+h}$ bzw. $a_{l+h}|a_l$. Damit ist $a_l=a_{l+h}$ und gemeinsam mit $b_l=b_{l+h}$ liefert dies den Widerspruch zur Voraussetzung, dass l als Vorperiodenlänge bereits minimal ist.
Bei den weiteren Überlegungen kann nun $l=0$ vorausgesetzt werden, und man betrachtet Gleichung (3), die dann folgende Gestalt hat:

$$-2D_{h-1}b_0+D_h+D_{h-1}b_h-C_{h-1}=0$$

bzw.

$$(b_h-2b_0)D_{h-1}=C_{h-1}-D_h.$$

Wegen Lemma 1 ist die rechte Seite kongruent Null modulo p, und zusammen mit $p\nmid D_{h-1}$ folgt daraus $b_h\equiv 2b_0 \pmod p$. Da aber $b_0, b_h\in R_p$, ist damit $b_h=2b_0$ oder $b_h=2b_0-p$. Im ersten Fall folgt $C_{h-1}=D_h$ und aus Lemma 2 ergeben sich damit die im Satz behaupteten Symmetriebeziehungen zwischen den a_i bzw. b_j.
Um Teil (ii) des Satzes zu zeigen, nimmt man an, dass $\xi\in\mathbb{Q}_p$ eine p-adische Kettenbruchentwicklung mit den in der Formulierung des Satzes genannten Eigenschaften besitzt. Unter Beachtung von $l=0$ setzt man C_ν und D_ν wie oben fest und erhält analog zu (1) für $\xi=[b_0,\overline{a_1;b_1,\ldots,a_h;b_h}]$ die quadratische Gleichung

$$(\xi-b_0)^2D_{h-1}+(\xi-b_0)(D_h+D_{h-1}b_h-C_{h-1})+D_hb_h-C_h=0$$

bzw.

$$\begin{aligned}\xi^2D_{h-1}+\xi(-2D_{h-1}b_0+D_h+D_{h-1}b_h-C_{h-1})+D_{h-1}b_0^2-D_hb_0-D_{h-1}b_0b_h&\\+C_{h-1}b_0+D_hb_h-C_h=0.&\end{aligned}$$

Aus den Symmetriebedingungen (*) folgt in Verbindung mit Lemma 2 $C_{h-1} = D_h$, und zusammen mit $2b_0 = b_h$ führt dies zu

$$\xi^2 = b_0^2 + \frac{C_{h-2}}{D_{h-1}} a_1 \in \mathbb{Q}.$$

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

3. Periodizität p-adischer Kettenbrüche

Bei Satz 1 und Satz 2 wird jeweils vorausgesetzt, dass eine gegebene Zahl eine periodische p-adische Kettenbruchentwicklung besitzt. Ein hinreichendes Kriterium dafür, dass dies für die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl der Fall ist, wurde von de Weger [5] gezeigt: «Ist $c \in \mathbb{N}$ darstellbar in der Form $c = e^2 + d\,p^k$ mit $e, d, k \in \mathbb{N}$, die den Bedingungen $e \in \{1, \ldots, (p-1)/2\}$ und $d \mid 2e$ genügen, so ist die p-adische Kettenbruchentwicklung der zu e modulo p kongruenten Quadratwurzel aus c periodisch mit Periodenlänge 1 oder 2.» Ausserdem führte de Weger dort einige «Ausnahmepaare» (c, p) an, für die die p-adische Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{c}$ periodisch (mit Periodenlänge 4 bzw. 6) ist, ohne jedoch auch für diese ein dem Kriterium ähnliches, allgemeines Prinzip anzugeben. Man stellt nun fest, dass sowohl sein Kriterium als auch die von ihm angegebenen Ausnahmepaare Spezialfälle des folgenden Satzes sind.

Satz 3. *Sei p eine ungerade Primzahl, $h \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{Q}$. Es mögen $a_1, \ldots, a_h \in E_p$ und $b_0, \ldots, b_h \in R_p$ existieren, die den folgenden Bedingungen genügen:*

(i) $2b_0 = b_h, b_\nu = b_{h-\nu}$ *für* $\nu = 1, \ldots, h-1$ *und* $a_\nu = a_{h+1-\nu}$ *für* $\nu = 1, \ldots, h$,

(ii) $c = b_0^2 + \dfrac{C_{h-2}}{D_{h-1}} a_1$ *mit*

$$C_{h-2} := K\begin{pmatrix} & a_1 & \ldots & a_{h-2} \\ b_h & b_1 & \ldots & b_{h-2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_{h-1} := K\begin{pmatrix} & a_2 & \ldots & a_{h-2} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{h-2} \end{pmatrix}.$$

Dann hat der p-adische Kettenbruch von $\sqrt{c}$ für $\sqrt{c} \equiv b_0 \pmod{p}$ die folgende Gestalt

$$\sqrt{c} = [b_0, \overline{a_1; b_1, \ldots, a_h; b_h}].$$

Bemerkungen. 1) Gilt $\sqrt{c} = [b_0, \overline{a_1; b_1, \ldots, a_h; b_h}]$ mit $2b_0 = b_h$ so können daraus – wie beim Beweis von Satz 1 erläutert – die übrigen der unter (i) und (ii) aufgeführten Bedingungen geschlossen werden. Die Formel aus (ii) gibt dann an, wie c aus dem Kettenbruch zu berechnen ist, und stellt für den p-adischen Fall einen Zusammenhang zwischen der Lösbarkeit diophantischer Gleichungen und der Periodizität von Kettenbruchentwicklungen dar.

2) Für den Fall $p = 2$ lässt sich ein zu Satz 3 ähnliches Resultat beweisen. Die Bedingung (i) ist entsprechend den Symmetriebeziehungen aus Satz 2 zu modifizieren; die Formel aus

(ii) gewinnt eine andere Gestalt, da im 2-adischen Fall die Vorperiode aus drei und nicht mehr aus einem Glied besteht.

Beweis von Satz 3. Seien $a_1, \ldots, a_h \in E_p$ und $b_0, \ldots, b_h \in R_p$ den Voraussetzungen des Satzes genügende Zahlen. Dann folgt aus den Bedingungen (i) und (ii)

$$(c - b_0^2) D_{h-1} = a_1 C_{h-2} = a_h C_{h-2}.$$

Definiert man C_{h-1}, D_h und D_{h-2} wie im Beweis von Satz 1 (unter Beachtung von $l = 0$), so erhält man aus Bedingung (i) in Verbindung mit Lemma 2 und der Rekursionsformel

$$C_{h-1} = D_h = b_h D_{h-1} + a_h D_{h-2} = 2 b_0 D_{h-1} + a_h D_{h-2}.$$

Man betrachtet nun den endlichen Kettenbruch

$$\begin{aligned}[b_h, a_1; b_1, \ldots, a_{h-1}; b_{h-1}, a_h; b_0 + \sqrt{c}] &= \frac{(b_0 + \sqrt{c}) C_{h-1} + a_h C_{h-2}}{(b_0 + \sqrt{c}) D_{h-1} + a_h D_{h-2}} \\ &= \frac{(b_0 + \sqrt{c}) C_{h-1} + (c - b_0^2) D_{h-1}}{(b_0 + \sqrt{c}) D_{h-1} + C_{h-1} - 2 b_0 D_{h-1}} = b_0 + \sqrt{c}.\end{aligned}$$

Aus dieser Identität folgt

$$b_0 + \sqrt{c} = [b_h, \overline{a_1; b_1, \ldots, a_h; b_h}]$$

bzw.

$$\sqrt{c} = [b_0, \overline{a_1; b_1, \ldots, a_h; b_h}].$$

P. G. Becker, Math. Institut, Universität Köln

LITERATUR

1 Borewicz S. I., Šafarevič I. R.: Zahlentheorie. Birkhäuser-Verlag, Basel-Stuttgart, 1966.
2 Bundschuh P.: *p*-adische Kettenbrüche und Irrationalität *p*-adischer Zahlen. El. Math. *32*, 36–40 (1977).
3 Perron O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig-Berlin, 2. Auflage, 1929.
4 Schneider Th.: Über *p*-adische Kettenbrüche. Symposia Math., Vol. IV, pp. 181–189 (1970).
5 de Weger B. M. M.: Periodicity of *p*-adic continued fractions. El. Math. *43*, 112–116 (1988).

 0013-6018/90/010001-08$1.50 + 0.20/0