Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **45 (1990)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 1017. Für ein nicht gleichschenkliges Dreieck ABC mit Umkreismittelpunkt O, Umkreisradius R und Inkreisradius r bezeichne X den Schnittpunkt der durch A und den Berührpunkt des Inkreises mit der Seite BC verlaufenden Transversalen und der Mittelsenkrechten auf BC. Analog im Sinne zyklischer Vertauschung seien die Punkte Y, Z definiert. Man zeige, dass

$$OX + OY + OZ = 5R + 2r\,.$$

H. Kappus, Rodersdorf

Lösung. Bekannt sind die Beziehungen (z.B.: H. Dörrie, Mathematische Miniaturen Nr. 55/56, Wiesbaden 1969)

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r \qquad \text{(Steiners Radiensatz)}$$

und $\quad OM_c + OM_b + OM_a = r + R \quad$ (Satz von Lazare Carnot).

M_a, M_b, M_c sind die Seitenmittelpunkte und r_1, r_2, r_3 die entsprechenden Ankreisradien des Dreiecks.

Bezeichnet man mit D_1 den Berührpunkt des Inkreises auf der Seite BC und mit D_2 den Berührpunkt des Ankreises zwischen B und C, so gilt

$$CD_1 = s - c = BD_2 \quad \text{und damit} \quad M_aD_1 = M_aD_2\,.$$

Aus der Kongruenz der Dreiecke D_1M_aX und M_aD_2X folgt $M_aX = r_1$.
Analog ergibt sich $M_bY = r_2$ und $M_cZ = r_3$ und damit die Behauptung

$$\begin{aligned} OX + OY + OZ &= OM_a + M_aX + OM_b + M_bY + OM_c + M_cZ \\ &= 4R + r + R + r = 5R + 2r\,. \end{aligned}$$

M. Vowe, Therwil

Weitere Lösungen sandten F. Bellot and A. Lopez (Valladolid, Spanien), G. Bercea (München, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 1018. Die Fibonacci-Folge (F_n), definiert durch

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{für} \quad n \geq 0\,,$$

ist bekanntlich für jedes $m \in \mathbb{N}$ modulo m rein periodisch. Man bestimme die Periodenlänge für $m = 2^k$ und $m = 3^k$, $k \in \mathbb{N}$.

J. Binz, Bolligen

Lösung: Wir werden beweisen, dass die Periodenlänge von (F_n) mod m für $m = 2^k$ und $m = 3^k$ gleich 3.2^{k-1} bzw. 8.3^{k-1} ist. Die Beweismethode lässt sich mühelos verallgemeinern:

Es sei A die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt bekanntlich $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{Z})$, und Periodizität mod m der Folge (F_n) entspricht genau Periodizität mod m der Folge (A^n) mit derselben Periodenlänge.

(1) Wir haben $A - I \not\equiv 0 \bmod 2$ und $A^2 - I \not\equiv 0 \bmod 2$ aber $A^3 = I + 2A$, $A^6 = I + 4(I + 2A)$, und im allgemeinen (mittels Induktion) $A^{3.2^{k-1}} = I + 2^k B_k$, wobei $B_k \not\equiv 0 \bmod 2$. Hieraus folgt die erste Behauptung.

(2) Es ist klar, dass $A^n - I \not\equiv 0 \bmod 3$ für $1 \leq n \leq 7$, und $A^8 = I + 3(4I + 3A)$, im allgemeinen (mittels Induktion) $A^{8.3^{k-1}} = I + 3^k C_k$, wobei $c_k \not\equiv 0 \bmod 3$. Hieraus folgt die zweite Aussage.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Bemerkung der Redaktion: Mehrere Leser weisen darauf hin, dass die Lösung von Aufgabe 1018 wohlbekannt ist:

Für die Periodenlänge $H(m)$ der Fibonacci-Folge (F_n) modulo $m \in \mathbb{N}$ wird in [1], Theorem 5, gezeigt: Ist $H(p^2) \neq H(p)$ für eine Primzahl p, so gilt $H(p^k) = H(p)\, p^{k-1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

[1] Wall, D. D.: Fibonacci series modulo *m*. Amer. Math. Monthly 67, 525–532 (1960).

Weitere Lösungen sandten O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), U. Everling (Bonn, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), H. H. Storrer (Zürich), P. Streckeisen (Zürich), B. M. M. de Weger (Enschede, NL), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 1019. a, b, c seien die Seiten eines Dreiecks. Man zeige, dass

$$\sqrt{a^2 + 3(b-c)^2} + \sqrt{b^2 + 3(c-a)^2} \geq \sqrt{3c^2 + (a-b)^2}\,.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

S. J. Bilchev, Russe, Bulgarien

Lösung.

$$\text{Mit}\quad \begin{aligned} x &:= -a + b + c > 0 \\ y &:= a - b + c > 0 \\ z &:= a + b - c > 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} a &= (y+z)/2 \\ b &= (z+x)/2 \\ c &= (x+y)/2 \end{aligned}$$

schreibt sich die Ungleichung wie folgt:

$$\sqrt{y^2 + z^2 - yz} + \sqrt{z^2 + x^2 - zx} \geqq \sqrt{x^2 + y^2 + xy} \tag{1}$$

Durch zweimaliges Quadrieren geht die Ungleichung (1) in die folgende, evidente Ungleichung über:

$$(yz + zx - xy)^2 \geqq 0\,,$$

mit Gleichheit für:

$$yz + zx = xy\,.$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass es Dreiecke gibt, für die das Gleichheitszeichen gilt. Ein Beispiel: $x = 6$, $y = 12 \rightarrow z = 4 \leftrightarrow a = 8$, $b = 5$, $c = 9$.

G. Bercea, München, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Egli (Zürich), F. Götze (Jena, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), M. S. Klamkin (Alberta, CD), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), J. Waldmann (Jena, DDR), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 1020. Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genüge der Differentialgleichung

$$f^{(4)}(z) = f(z)$$

und den Anfangsbedingungen

$$f(0) = 1\,, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0\,.$$

Man berechne den Wert des Produktes

$$\prod_{n=1}^{\infty} f(z/2^n); \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\,.$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

Lösung: Mit einem Exponentialansatz $f(z) = e^{\lambda z}$ findet man leicht die vier Basislösungen e^z, e^{-z}, e^{iz}, e^{-iz} $(i^2 = -1)$, die sich auch durch $\cosh z$, $\sinh z$, $\cos z$, $\sin z$ ersetzen lassen. Die Konstanten in der allgemeinen Lösung

$$f(z) = A\cosh z + B\sinh z + C\cos z + D\sin z$$

der Differentialgleichung bestimmen sich aus den vier Anfangsbedingungen zu $A = C = \frac{1}{2}$, $B = D = 0$. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$f(z) = \tfrac{1}{2}(\cosh z + \cos z) = \cos\left(\frac{1+i}{2}z\right)\cos\left(\frac{1-i}{2}z\right). \tag{1}$$

Mit dem bekannten Resultat

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos(z/2^n) = \frac{\sin z}{z} \qquad (0 \neq z \in \mathbb{C}) \tag{2}$$

ergibt sich aus (1) sofort

$$\prod_{n=1}^{\infty} f(z/2^n) = \frac{\cosh z - \cos z}{z^2} \qquad (z \neq 0 \text{ beliebig komplex}).$$

F. Götze, Jena, DDR

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), M. S. Klamkin (Alberta, CD), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Streckeisen (Zürich), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), P. Wyss (Flumenthal).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1991* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 1037. In der Ebene eines Dreiecks ABC mit Seitenlängen a, b, c und Höhenschnittpunkt H sei ein von A, B, C verschiedener Punkt O gegeben. Mit

$$x := a/OA, \quad y := b/OB, \quad z := c/OC$$

beweise man die Ungleichung

$$x + y + z \geq xyz$$

mit Gleichheit genau für $O = H$. Man diskutiere Spezialfälle.

G. Bercea, München, BRD

Aufgabe 1038. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung

$$(x+2)^y = x^y + 2y^y.$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

Aufgabe 1039. Mit $k \in \mathbb{N}$ und $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei

$$a(k,m,n) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n+k+1-2^m j}{k-1}.$$

a) Zeige: Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass

$$a(k,m,n) = 0 \quad \text{für} \quad n > N \quad \text{und alle } k, m.$$

b) Man ermittle

$$b(k,m) := \sum_{n=0}^{N} a(k,m,n).$$

J. Binz, Bolligen

Literaturüberschau

O. Kerner et al.: Vieweg Mathematik Lexikon. Begriffe/Definitionen/Sätze/Beispiele für das Grundstudium. XII und 377 Seiten, DM 38,–. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1988.

Die Autoren wollten mit diesem Band ein «handliches Nachschlagewerk» vor allem für Mathematikstudenten schaffen. Dies ist ihnen auch weitgehend gelungen, wobei ein Student wohl schon einige Semester studiert haben muss, wenn er die recht dichte Information der einzelnen Artikel verstehen will.

Daneben eignet sich das Büchlein auch gut für Personen, die ein Mathematikstudium absolviert haben, sich aber in ihrem Beruf nicht mehr hauptsächlich mit diesem Stoff befassen. Zur Auffrischung von Wissen und Kurzinformationen über die wesentlichsten Beziehungen scheint mir das Werk ausserordentlich geeignet. Nicht mehr präsente Begriffe lassen sich – wenn nötig – über die zahlreichen Querverweise wieder in Erinnerung rufen.

Etwas vom Wertvollsten scheinen mir die angegebenen Beispiele und Zusatzinformationen zu den exakten Definitionen und Sätzen. Dieser Teil dürfte ruhig noch etwas stärker ausgebaut und ergänzt werden, vor allem durch noch elementarere Beispiele. Auch die englische und französische Übersetzung der Begriffe bilden eine hilfreiche Ergänzung beim Studium fremdsprachiger Artikel.

Am wenigsten gut scheint mir die Stochastik durch elementare Beispiele und Beziehungen dokumentiert. Das Abstraktionsniveau ist dort hoch. Dabei wäre wohl gerade in diesem Bereich das Bedürfnis nach mathematisch nicht zu abstrakter Information noch mehr vorhanden als bei den «klassischen» Themen.

Diese Kritik schmälert meinen positiven Gesamteindruck bezüglich Ausgewogenheit in Umfang und Abstraktionsgrad des ganzen Werkes nicht.

E. Senn

S. Lang: Faszination Mathematik. Ein Wissenschaftler stellt sich der Öffentlichkeit. 141 Seiten, 91 Abbildungen, DM 29,80. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1989.

Das Buch ist die authentische Wiedergabe von drei öffentlichen «Samstagnachmittag»-Vorlesungen, die Serge Lang in den Jahren 1981 bis 1983 in Paris gehalten hat. Durch die Übersetzung der Originalfassung ins Deutsche ist nichts von der Lebendigkeit und dem Enthusiasmus verloren gegangen, mit welcher Serge Lang die Zuhörerschaft in die drei unterschiedlichen Gebiete der aktuellen Forschung – Primzahlen, Diophantische Gleichungen und Grosse Probleme der Geometrie – eingeführt hat. Dabei ist Lang sehr geschickt und flexibel auf das bunt zusammengewürfelte Publikum eingegangen. Es ist ihm gelungen, in rein informellem Stil so schwierige Probleme wie die Riemannsche Vermutung über die Primzahl-Verteilung, das Fermatsche Problem und die Mordellschen Vermutungen, das Klassifikationsproblem für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten und die Vermutungen von Poincaré und Thurston vorzustellen. Beispielhaft ist dabei sein Anliegen, einer breiten Öffentlichkeit etwas vom Geist und Gegenstand moderner Mathematik zu vermitteln.

Die Begeisterung der Zuhörerschaft dokumentieren die Dialoge und die an die Vorträge anschliessenden Fragerunden, die alle mitaufgezeichnet worden sind. Dieses Buch ist deshalb nicht nur eine schöne Erinnerung an jenes Ereignis, sondern auch jedem interessierten Laien zu empfehlen, der einen Einblick in die Welt und Faszination der Mathematik gewinnen möchte.

R. Kellerhals